文章编号：1004—5589（2017）02—0570—09

改进阈值法在二代小波变换去噪中的应用

刘俊成[1]，赵强[2]

1. 吉林大学 地球探测科学与技术学院，长春 130026；
2. 华北地质勘查局，河北 保定 071051

摘要：地震信号去噪能有效提高信号的信噪比和分辨率。二代小波变换可以在不同尺度上对含噪信号进行小波分解和多分辨率分析，实现窗口宽度自适应调整的局部化分析。但小波变换阈值法在去噪过程中会在信号的不连续邻域会产生伪吉布斯效应，而平移不变量阈值去噪方法通过平移－去噪－平均的思想可以很好的解决该问题。因此本文在已有的二代小波变换阈值去噪的基础上将平移不变量这一改进方法应用于二代小波变换中，实现了对地震信号更加快速有效的去噪处理，并在模拟数据试算和实际数据试算中取得了良好的去噪效果。

关键词：小波变换；二代小波变换；阈值法去噪；平移不变量去噪

中图分类号：P631.44　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.3969/j.issn.1004-5589.2017.02.023

Application of improved threshold method on second-generation wavelet transform denoising

LIU Jun-cheng[1], ZHAO Qiang[2]

1. College of Geo-exploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China;
2. Geological Survey of North China, Baoding 071051, Hebei, China

Abstract: Seismic signal denoising can effectively improve the signal-to-noise ratio and the resolution of the signal. The second-generation wavelet transform can denoise signal in different scales and resolutions and realize local analysis in which the window width can be adjusted adaptively. However, in the process of denoising, wavelet threshold method exhibits pseudo gibbs effect for discontinuous signal. This problem can be solved by the translation invariant threshold denoising method via translation-denoising-average. Therefore, based on the existing results on the second-generation wavelet transform and threshold denoising, translation invariant will be applied to the second-generation wavelet transform to denoise signal fast and effectively, and achieve good denoising result in the simulated data trial and real data trial.

Key words: wavelet transform; second-generation wavelet transform; wavelet threshold method; translation invariant threshold denoising method

0 引言

地震信号分辨率的高低在地震勘探中至关重要。而提高信号的信噪比能有效提高信号分辨率，因此地震信号去噪是地震数据处理的重要环节。傅立叶变换[1]是传统去噪方法的重要手段，它能有

收稿日期：2016-03-23；**改回日期**：2017-02-27
基金项目：国家“863”计划（2013AA063901）.

效处理和分析信号，但对信号整个时间域的特性有要求，无法进行局部化分析[2]。短时傅里叶变换通过对信号加窗实现了局部分析，但其固定的窗口宽度导致无法同时在时间和频率域上提高分辨率。小波变换[3]具有自适应调整窗口宽度大小的特点，从而解决了短时傅里叶变换的问题；Swelden 提出构造二代小波的提升算法[4,5]，该方法实现了从整数到整数的小波变换，计算速度得到了极大的提升，而且逆变换简单方便；陈香朋等人将二代小波变换引入到地震资料去噪处理中[6]，取得了良好的效果。在实际去噪时小波阈值去噪方法使用较为普遍[7]，但该方法会在信号的不连续邻域产生伪吉布斯现象，影响去噪效果，而平移不变量[8]去噪则能有效地抑制这种现象；陈勇等人将平移不变量应用于 FBG 信号传感信号中[9]，该方法有效抑制了伪吉布斯效应得到了理想的去噪效果。本文把平移不变量这一改进的阈值去噪方法应用于二代小波变换。模拟数据和实际地震资料的试算结果表明该方法可以有效去除伪吉布斯效应，得到更加有效的去噪结果。

1　小波变换基本原理

1.1　连续小波变换

小波变换可以对信号进行局部化分析又可自适应调整窗口宽度[10]。

小波变换的定义[11,12]，对满足：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} \mathrm{d}\omega < +\infty \tag{1}$$

的函数 $\varphi(t)$ 基本小波，令：

$$\varphi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{2}$$

式中：a、b 为实数且 $a \neq 0$。

式（2）为基本小波产生的连续小波。设 $f(t)$ 平方可积，则定义连续小波变换为：

$$W_f(a,b) = <f,\varphi_{ab}> = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

式中：b 为平移因子；a 为尺度因子。

1.2　离散小波变换

在实际问题中离散小波变换更为实用，此时参数 a 和 b 取：

$$a = a_0^m \quad a_0 > 0, m \in Z \tag{4}$$

$$b = nb_0a_0^m \quad (b \in R, n \in Z) \tag{5}$$

小波 $\varphi_{a,b}(t)$ 变为：

$$\varphi_{m,n}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}}(a_0^{-m}t - nb_0) \quad (m, n \in \mathrm{Z}) \tag{6}$$

对 $f(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$，相应的离散小波变换为：

$$DWT_{a,b} = \int_R f(t)\varphi_{m,n}(t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

其内积形式为：

$$DWT_{a,b} = <f(t),\varphi_{m,n}(t)> \tag{8}$$

若取 $a = 2^j$，$j \in Z$，则得到二进小波。设 $\psi(t) \in L^2(R)$，若存在常数 A 和 B，$0 < A <= B < \infty$，使得：

$$A < \sum_k |\psi(2^k\omega)|^2 \leqslant B \tag{9}$$

则称 $\psi(t)$ 为二进小波。此时 $f(t) \in L^2(R)$ 二进小波变换定义为：

$$DWT_{2^k} = 2^{-k}\int_R f(t)\,\overline{\psi\left(\frac{t-b}{2^k}\right)}\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

其傅里叶变换：

$$DWT_{2^k} = F(\omega)\,\overline{\psi(2^k\omega)} \tag{11}$$

由（9）、（10）、（11）式可得：

$$A\|F(\omega)\|^2 \leqslant \sum_k \|DWT_{2^k}(\omega)\|^2 \leqslant B\|F(\omega)\|^2 \tag{12}$$

式（12）表明二进小波是框架[13]，根据框架理论知二进小波变换可以重构 $f(t)$。为此定义方程：

$$\sum_k \psi(2^k\omega)\chi(2^k\omega) = 1 \tag{13}$$

式中：$\chi(t)$ 是重构小波。二进小波的重构公式为：

$$f(t) = \int_R \{ \sum_k DWT_{2^k}(b) 2^{-k} \chi[2^{-k}(t-b)] \} \mathrm{d}b \quad (14)$$

若取 $a_0 = 2$，$b_0 = 1$，有二进正交小波为：

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{k}{2}} \psi(2^{-k}t - n) \quad (15)$$

2 二代小波变换基本原理

小波变换是对信号进行不同尺度、不同频带、不同时间的分离和重构，能够有效的进行信号的全面和局部分析。第二代小波变换有着优秀的算法和构造灵活的小波基函数[14]，第二代小波变换既能进行多分辨率分析又具有不依赖于傅里叶算法、逆变换容易实现和可实现非线性小波变换等优点[15]。因此二代小波变换较传统小波变换有着更大的适用空间和发展潜力。二代小波变换的算法步骤：

2.1 分裂

设输入信号为 $s_j = \{s_{j,k}\}$，分裂是把输入信号分为长度为输入信号长度一半的奇序列 o_{j-1} 和偶序列 e_{j-1}：

$$\mathrm{split}(s_j) = (e_{j-1}, o_{j-1}) \quad (16)$$

式中：$e_{j-1} = \{e_{j-1,k} = s_{j,2k}\}$；$o_{j-1} = \{o_{j-1,k} = s_{j,2k+1}\}$。

2.2 预测

预测是用分裂后的一个序列预测另一个序列得到 $P(e_{j-1})$，用实际序列减去 $P(e_{j-1})$，结果记为 d_{j-1}。d_{j-1} 是细节系数，代表 s_j 的高频特征。预测过程：

$$d_{j-1} = o_{j-1} - P(e_{j-1}) \quad (17)$$

式中：P 为预测算子，通常记为预测函数 P_k，函数 P_k 的实现方式有多种，简单的预测方法可以直接令预测数据为 e_{j-1} 中的对应数据本身：

$$P_k(e_{j-1,k}) = e_{j-1,k} = s_{j,2k} \quad (18)$$

或取 e_{j-1} 中对应数据相邻数值的平均值：

$$\begin{aligned} P_k(e_{j-1,k}) &= (e_{j-1,k} + e_{j-1,k+1})/2 \\ &= (s_{j,2k} + s_{j,2k+1})/2 \end{aligned} \quad (19)$$

也可以是其他复杂的函数。

2.3 更新

输入信号经过分裂、预测处理后会产生参数上的一些误差，因此对数据进行更新处理以恢复信号原本的性质。用 U 来表示更新算子，更新过程：

$$s_{j-1} = e_{j-1} + U(d_{j-1}) \quad (20)$$

式中：s_{j-1} 对应原始信号 s_j 的低频部分。

更新算子可以选择简单或复杂的不同函数，如：

$$U_k(d_{j-1}) = d_{j-1,k/2} \quad (21)$$

或：

$$U_k(d_{j-1}) = (d_{j-1,k-1} + d_{j-1,k})/4 + 1/2 \quad (22)$$

在进行小波变换时不同的提升小波取决于 P 与 U 所取的函数。

3 小波去噪方法原理

3.1 小波阈值去噪原理

小波阈值去噪法中[16-18]可证平稳白噪声的正交小波变换仍然是平稳的白噪声，初始信号经小波变换后少数幅度较大的小波系数包含了主要的能量，而噪声经小波变换后其小波系数幅度较小，且分布在各尺度下的时间轴上[19]。根据这一原理在各尺度上保留幅度较大的小波系数并把幅度较小者置零，用剩余的小波系数重构信号即可得到去噪后信号。

阈值处理包括硬阈值和软阈值处理。

3.1.1 硬阈值

当小波系数绝对值小于既定阈值时置零，否则保持不变，这就是硬阈值。用公式表示为：

$$\omega_\lambda = \begin{cases} \omega, & |\omega| \geqslant \lambda \\ \omega, & |\omega| < \lambda \end{cases} \quad (23)$$

式中：ω 为小波系数；λ 为给定的阈值；ω_λ 为处理后小波系数。

3.1.2 软阈值

当给定阈值大于小波系数的绝对值时置零，否则减去阈值，公式表达式为：

$$\omega_\lambda = \begin{cases} [\mathrm{sign}(\omega)](|\omega| - \lambda), & |\omega| \geqslant \lambda \\ 0, & |\omega| < \lambda \end{cases} \quad (24)$$

分析阈值处理原理可知，硬阈值处理后在信号不连续点会产生振荡，但信号特征可以得到较好保留。软阈值处理后的信号连续性较好，但当 $|\omega| < \lambda$ 时，ω_λ 与 ω 会产生偏差从而降低近似程度。两者各有优缺点，实际工作中视情况选择阈值处理方法。阈值函数和阈值的选取在阈值处理方法中起着重要作用，在实际处理时应视情况选择合适的阈值函数。

3.2　平移不变量小波去噪原理

小波阈值去噪在信号的不连续点处常常会产生伪吉布斯效应，影响去噪效果。而平移不变量通过循环平移平均的方法能有效的降低初始信号和估计信号的均方误差，去除伪吉布斯效应。

信号不连续点的位置极大的影响了伪吉布斯效应，可以通过平移改变信号次序进而改变不连续点的位置[20]，然后进行阈值去噪，反向平移去噪结果，恢复到之前的信号次序，从而去除了伪吉布斯效应。其“平移－去噪－平均”用公式表达为：

$$\hat{x} = Ave_{h\in H} S_{-h}(T(S_h(x))) \qquad (25)$$

式中：Ave 为求平均；H 为平移范围；S_h 为平移循环 h 位的平移算子；S_{-h} 为其逆运算；T 表示阈值去噪处理。

平移不变量去噪的具体步骤[21]：

①对信号进行平移长度为信号长度 N 的平移；

②在各尺度上离散小波分解原信号和每次循环平移 1 位后的信号得到小波分解系数并把它存入相应位置；

③使用固定阈值和软阈值函数对小波系数进行阈值去噪处理；

④使用去噪后剩余的小波系数重构信号；

⑤把所得结果反向平移求平均即得去噪信号。

4　数据试算

4.1　模拟数据试算

4.1.1　含噪 Ricker 子波试算

把纯净的 Ricker 子波添加高斯白噪声后采用 sym4 小波分别进行小波、二代小波和平移不变量二代小波去噪处理，得到的去噪结果如图 1、图 2 所示。

从图 1 和图 2 可以看出与二代小波去噪效果相比，平移不变量二代小波在去噪效果上更为明显，进一步提升了去噪效果，使去噪后信号更接近于原始信号。为了更好的比较二代小波和平移不变量二代小波的去噪效果，求取两种方法去噪后信号的信噪比[22]。信噪比计算公式：

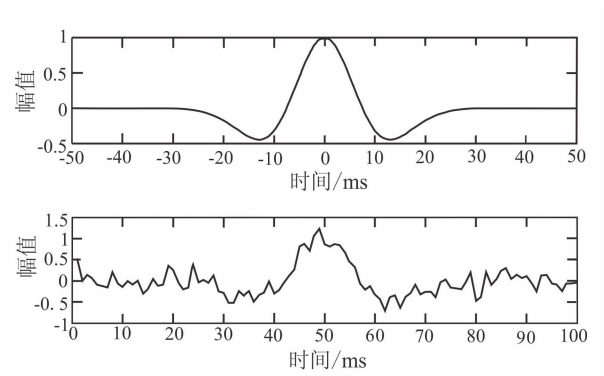


图 1　Ricker 子波和含噪 Ricker 子波

Fig. 1　Ricker wavelet and noised Ricker wavelet

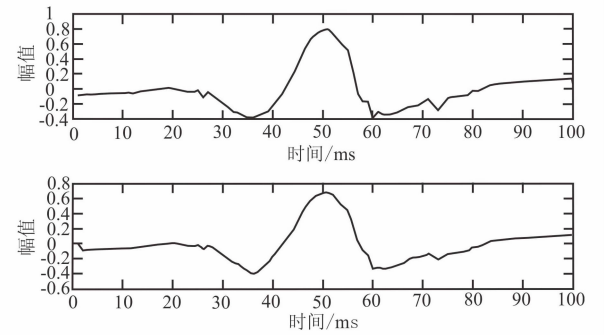


图 2　二代小波和平移不变量二代小波去噪对比

Fig. 2　Denoising comparison of second generation wavelet and translation invariant of second generation wavelet

$$SNR = 10\log_{10}\frac{\| s_{true} \|_2^2}{\| s_{true} - s \|_2^2}$$

式中：s_{true} 是真实有效信号；s 是去噪后得到的有效信号；$\| \cdot \|_2^2$ 表示取 $l-2$ 范数的平方。通过计算得到二代小波去噪后信号的信噪比为 6.013 2，而平移不变量二代小波去噪后信号的信噪比为 8.328 0。

图 3 和图 4 分别是频率域雷克子波和频率域含噪的雷克子波。图 5 和图 6 是对频率域上含噪 Ricker子波分别进行两种去噪方法的处理结果，比较

两图可以看出，平移不变量二代小波在频率域上也有着更好的去噪效果[23]。

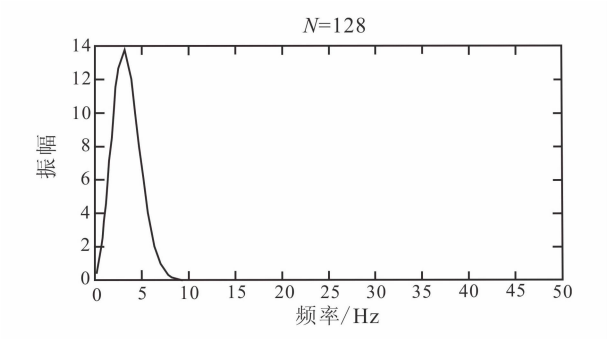


图 3 频率域 Ricker 子波

Fig. 3 Ricker wavelet in frequency domain

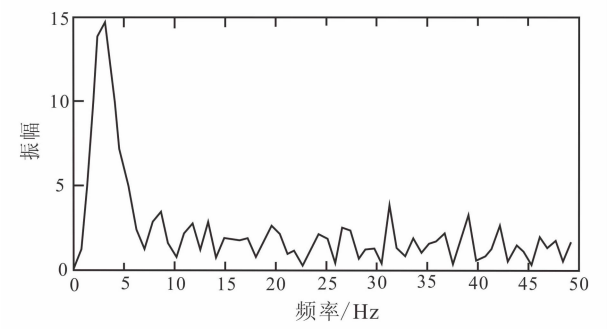


图 4 频率域含噪 Ricker 子波

Fig. 4 Noised Ricker wavelet in frequency domain

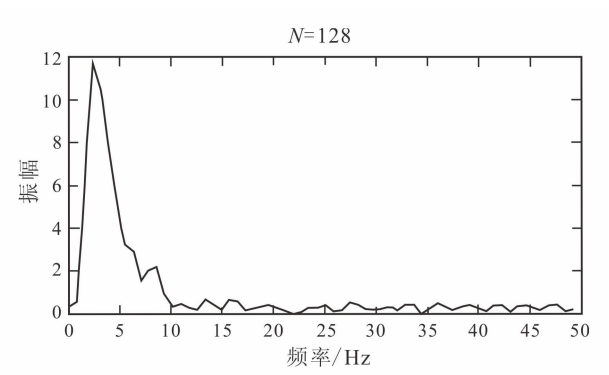


图 5 频率域二代小波去噪结果

Fig. 5 Denoising result of second generation wavelet in frequency domain

4.1.2 含噪模型试算

选择包含倾斜线性同相轴和平行线性同相轴的叠后模型数据进行测试。该模型共有 256 道地震记录，时间采样间隔为 4 ms（图 7），并在原模型加入高斯白噪（图 8）。对该模型分别进行二代小波变换去噪和平移不变量二代小波变换去噪，去噪结果如图 9 和图 10 所示，噪声差剖面如图 11 和图 12 所示。对比图 9、图 10 可以看出平移不变量二代小波去噪方法有效地去除了伪吉布斯效应，得到了

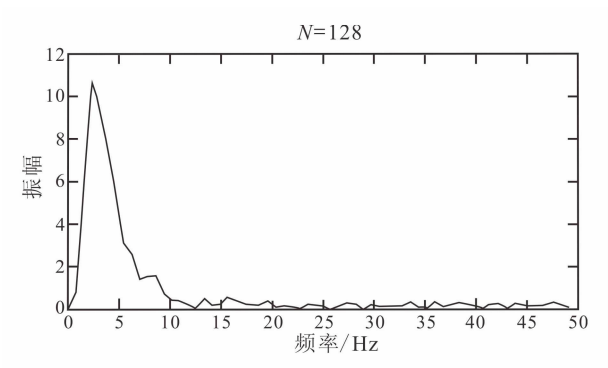


图 6 频率域平移不变量二代小波去噪结果

Fig. 6 Denoising result of translation invariant of second generation wavelet in frequency domain

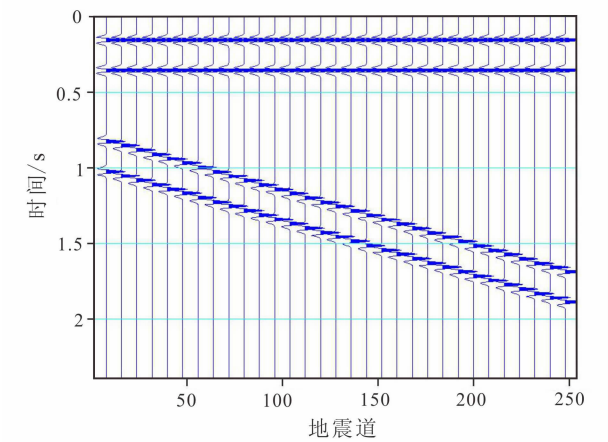


图 7 合成地震剖面

Fig. 7 Compound seismic section

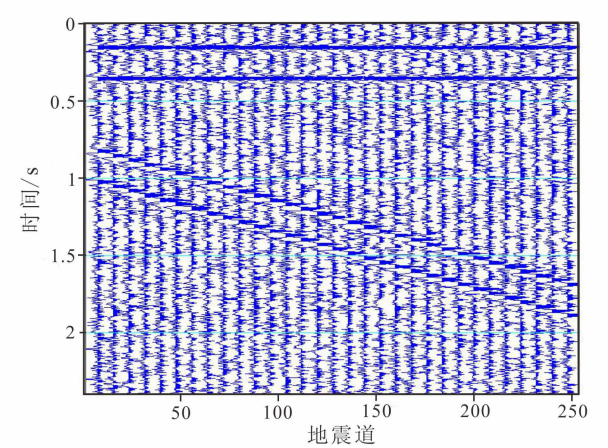


图 8 加噪声的合成地震剖面图

Fig. 8 Compound seismic section with noise

更加准确的去噪效果。

通过信噪比计算公式求得，图 8 所示的原含噪信号的信噪比为 -1.82，信噪比为负数表明噪声的能量超过了信号的能量。利用二代小波变换去噪后，图 9 所示的信号的信噪比提升为 3.12。利用平移不变量二代小波变换去噪后，图 10 所示的信号的信噪比提升为 5.16。通过去噪后效果图的对比和信噪比的对比可以看出，平移不变量二代小波变换保留了有效信号细节，提高了信号的信噪比，更能有效的消除伪吉布斯效应[24]。

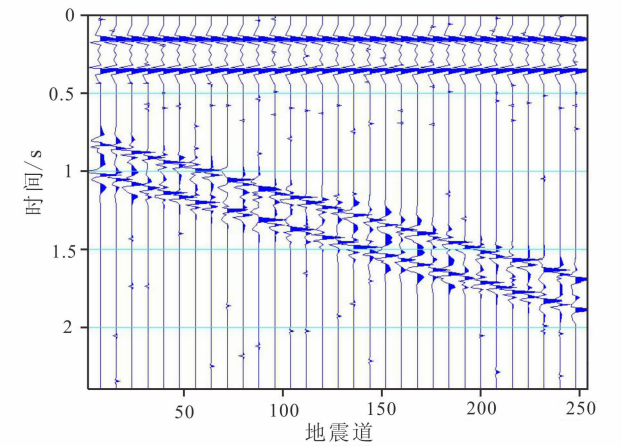


图 9　二代小波噪结果

Fig. 9　Denoising result of second generation wavelet

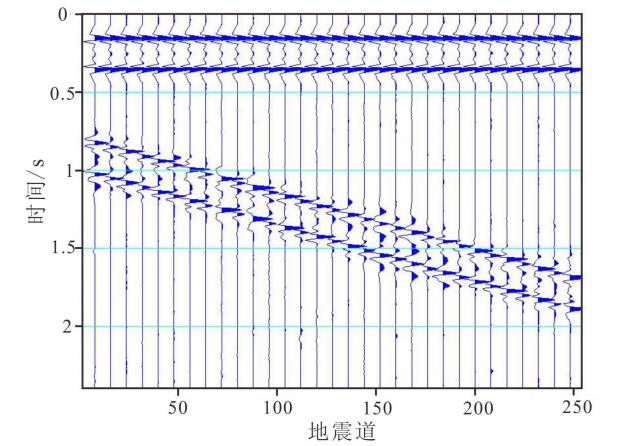


图 10　平移不变量二代小波去噪结果

Fig. 10　Denoising result of translation invariant of second generation wavelet

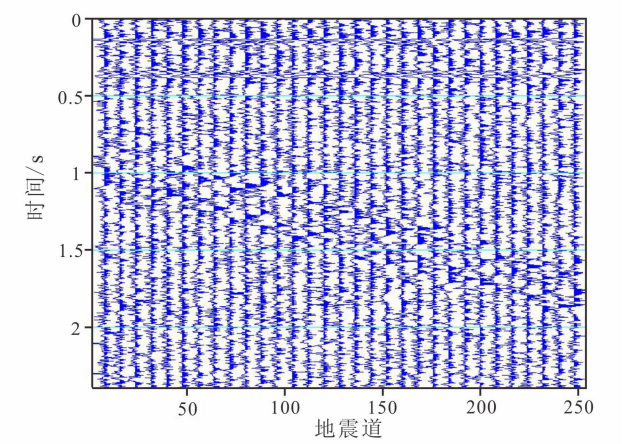


图 11　二代小波去噪差剖面

Fig. 11　Difference section of second generation wavelet

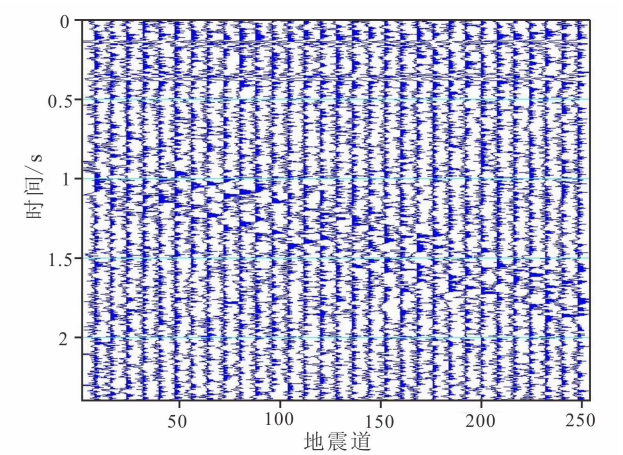


图 12　平移不变量二代小波去噪差剖面

Fig. 12　Difference section of translation invariant of second generation wavelet

4.2　实际数据试算

为了更好地验证本文方法的实际应用效果，对某实际地震资料进行了两种方法的去噪处理和比较。该地震资料共有 216 道地震记录，时间采样间隔为 1 ms，该地震数据的噪声主要是由该地区的环境条件所引起的。对原含噪信号进行二代小波变换，在小波域中使用阈值法去噪，去噪结果如图 14 所示。可以看出在图 14 中存在很多数据不连续点，也就是伪吉布斯效应，影响整个数据的质量。图 15 是平移不变量二代小波去噪后的结果，对比图 14 可以看出伪吉布斯效应得到了很好的消除，数据的质量也得到了较高的提升。图 16 和图 17 分别是二代小波去噪差剖面和平移不变量二代小波去噪差剖面，对比两种去噪方法的噪声差剖面可以看出，小波阈值去噪后的噪声剖面因为伪吉布斯效应的存在而呈现出一定的不连续性，而本文方法去噪后的噪声更加接近随机噪声[25]。实际数据试算结

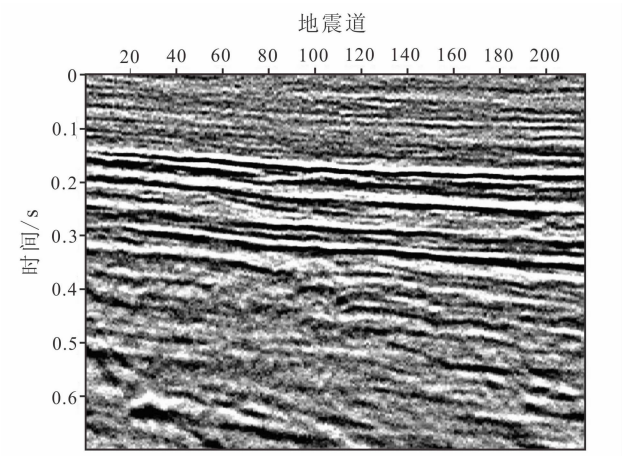


图 13 某含噪实际地震资料剖面

Fig. 13 Section of a real seismic data with noise

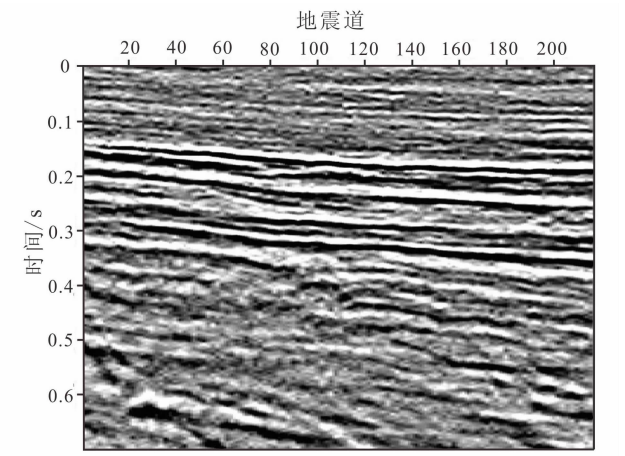


图 14 二代小波去噪结果

Fig. 14 Denoising result of second generation wavelet

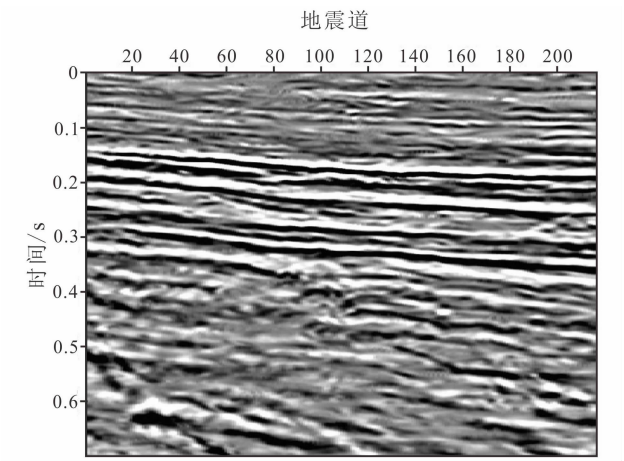


图 15 平移不变量二代小波去噪结果

Fig. 15 Denoising result of translation invariant of second generation wavelet

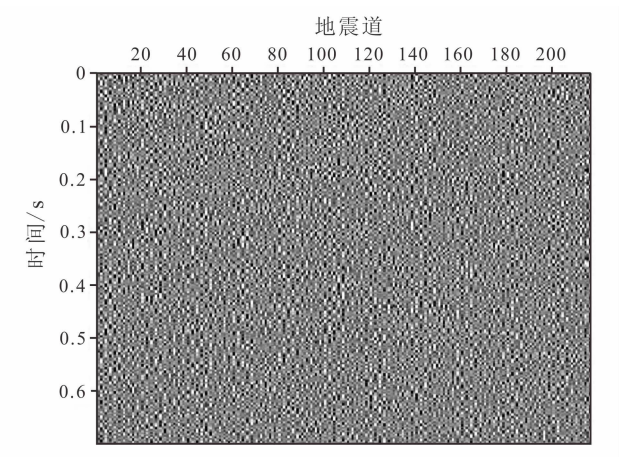


图 16 二代小波去噪差剖面

Fig. 16 Difference section of second generation wavelet in denoising

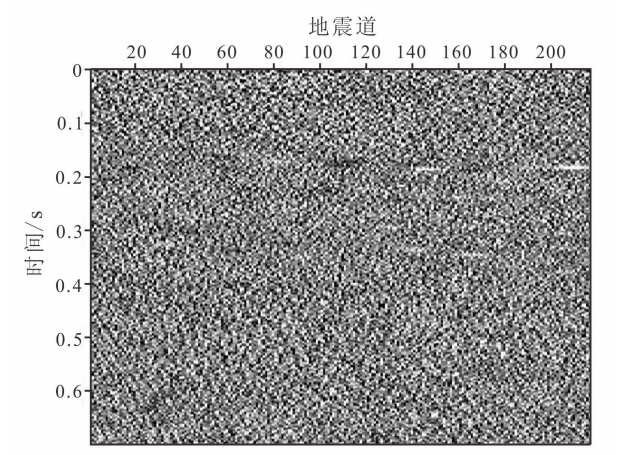


图 17 平移不变量二代小波去噪差剖面

Fig. 17 Difference section of translation invariant of second generation wavelet in denoising

果表明，平移不变量二代小波去噪方法能有效去除伪吉布斯效应，提高地震资料的信噪比[25]。

5 结论

（1）二代小波变换和平移不变量二代小波变换都可以很好的保留有效信号细节，清晰的呈现图像信号，但平移不变量二代小波在降低噪声影响，提高信噪比方面具有更好地效果。

（2）不同的阈值去噪方法对最终结果有着巨大的影响，一般来讲根据小波分解层数采用每层都能自适应调整的阈值计算方法有着更好的去噪效果。

（3）模拟数据试算和实际数据试算结果表明：该改进的去噪方法不仅能够抑制噪声在不连续点处

的振荡现象，改善波形的光滑性，而且能够提高信号的信噪比获得更好的去噪效果。

参考文献：

[1] 李庆忠. 走向精确勘探的道路［M］. 北京：石油工业出版社，1993：107-120.
LI Qing-zhong. On the way to precise exploration［M］. Beijing：Petroleum Industry Press，1993：107-120.

[2] 康冶，于承业，贾卧，等. F-X 域去噪方法研究［J］. 石油地球物理勘探，2003，38（2）：273-282.
KANG Ye，YU Cheng-ye，JIA Wo，et al. Research on de-noising in F-X domain［J］. Oil Geophysical Prospecting，2003，38（2）：273-282.

[3] Daubechies I. Where do wavelets come from? a personal point of view［J］. Proceedings of the IEEE，1996，84（4）：510-513.

[4] Sweldens W. The lifting scheme：a custom-design construction of biorthogonal wavelets［J］. Applied & Computational Harmonic Analysis，1996，3（2）：186-200.

[5] Sweldens W，Schrö P. Building your own wavelets at home［J］. Lecture Notes in Earth Sciences Berlin Springer Verlag，1998，90：72-107.

[6] 陈香朋，曹思远. 第二代小波变换及其在地震信号去噪中的应用［J］. 石油物探，2004，2（6）：70-74.
CHEN Xiang-peng，CAO Si-yuan. The second generation wavelet transform and its application in seismic signal denoising［J］. Petroleum Geophysical Exploration，2004，2（6）：70-74.

[7] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding［J］. IEEE Transactions on Information Theory，1995，41（3）：613-627.

[8] Coifman R R，Donoho D L. Translation-invariant de-noising［J］. Neuroimage，1995，103（2）：125-150.

[9] 陈勇，贺明玲，刘焕淋，等. 利用改进阈值的平移不变量小波处理 FBG 传感信号［J］. 光电子·激光，2013（2）：246-252.
CHEN Yong，HE Ming-ling，LIU Huan-lin，et al. Treatment of FBG sensing signal by translation invariant wavelet with an improved threshold［J］. Photoelectron Laser，2013（2）：246-252.

[10] 芦婧. 小波变换图像去噪及其在 SAR 图像中的应用：硕士学位论文［D］. 陕西：西安科技大学. 2011.
LU Jing. Image denoising based on wavelet transform and its application in SAR image：master's degree thesis［D］. Shanxi：Xi'an University of Science and Technology，2011.

[11] 詹毅，小波变换去噪方法研究［J］. 物探化探计算技术，2001，23（4）：229-302.
ZHAN Yi. A method of elimation noise by wavelet transform［J］. Computing Techniques for Geophysical & Geochemical Exploration，2001，23（4）：229-302.

[12] 马秀红，曹继平，董晟飞. 小波分析及其应用［J］. 计算机技术与发展，2003，13（8）：93-94.
MA Xiu-hong，CAO Ji-ping，DONG Sheng-fei. Wavelet analysis and its application［J］. Computer Technology and Development，2003，13（8）：93-94.

[13] 孙秀燕. 基于小波的图像去噪技术［J］. 科技信息，2010（30）：425-426.
SUN Xiu-yan. Image denoising technology based on wavelet［J］. Scientific and Technical Information，2010（30）：425-426.

[14] 吴彦华，钟子发，蔡卫东. 第 2 代小波变换算法的改进及应用［J］. 数据采集与处理，2005，20（3）：281-285.
WU Yan-hua，ZHONG Zi-fa，CAI Wei-dong. Improvement and application of second generation wavelet transform algorithm［J］. Journal of Data Acquisition & Processing，2005，20（3）：281-285.

[15] 胡宁杰. 小波提升格式算法及其在地震波处理中的应用［J］. 河南科技学院学报：自然科学版，2006，34（1）：99-102.
HU Ning-jie. The lifting scheme for wavelet transform and its application in earthquake wave process［J］. Journal of Henan Institute of Science & Technology，2006，34（1）：99-102.

[16] Donoho D L，Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage［J］. Journal of the American Statistical Association，1995，90（432）：1200-1224.

[17] Mallat S G. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L2（R）［J］. Transactions of the American Mathematical Society，1989，315（1）：69-87.

[18] Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition：the wavelet representation［J］. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence，1989，11（7）：674-693.

[19] 王典，刘财，刘洋，等. 基于提升算法和百分位数软阈值的小波去噪技术［J］. 地球物理进展，2008，23（4）：1124-1130.
WANG Dian，LIU Cai，LIU Yang，et al. Application of wavelet transform based on lifting scheme and percentiles soft-threshold to elimation of seismic random noise［J］. Progress in Geophysics，2008，23（4）：1124-1130.

[20] 唐贵基，蔡伟，胡爱军，等. 平移不变量小波阈值去噪法在齿轮振动信号处理中的应用［J］. 噪声与振动控制，2008，28（6）：17-19.
TANG Gui-ji，CAI Wei，HU Ai-jun，et al. Application of translation invariant wavelet threshold denoising method in vibration signal processing of gears［J］. Noise & Vibration Control，2008，28（6）：17-19.

[21] 薛伟，张健，陈良章，等. 一种改进阈值的平移不变量雷达信号去噪方法［J］. 数据采集与处理，2008，23（6）：668-672.
XUE Wei，ZHANG Jian，CHEN Liang-zhang，et al. Translation-invariant denoising method based on improved threshold for Radar signal［J］. Journal of Data Acquisition & Processing，2008，23（6）：668-672.

[22] 姚胜利. 地震信号的小波去噪方法研究：硕士学位论文［D］. 长沙：中南大学，2007.
YAO Sheng-li. Study on methods of noise removing by wavelet and their applications to seismic data processing：master's degree thesis［D］. Changsha：Central South University，2007.

[23] 王培茂，杨冬红，高茹，等. 基于匹配小波包算法的地震信号去噪［J］. 世界地质，2011，30（2）：277-281.
WANG Pei-mao，YANG Dong-mei，GAO Ru，et al. Seismic signal denoising by match wavelet packet algorithm［J］. Global Geology，2011，30（2）：277-281.

[24] 李红雨，杨长保，吴燕冈，等. 小波变换在位场资料去噪和位场分离中的应用［J］. 世界地质，2014，33（1）：200-208.
LI Hong-yu，YANG Chang-bao，WU Yan-gang，et al. Application of wavelet transform for de-noising and potential field separation in gravity and magnetic data processing［J］. Global Geology，2014，33（1）：200-208.

[25] 徐峥伟. 小波阈值特征选取与去噪研究：硕士学位论文［D］. 长春：吉林大学，2008.
XU Zheng-wei. Research on characterictic selecting of wavelet thresholding and denoise：master's degree thesis［D］. Changchun：Jilin University，2008.