文章编号：1004—5589（2017）02—0579—09

双曲 Radon 变换参数分析

邢慧婷，刘财，李炳秀，刘洋，魏忠宇

吉林大学 地球探测科学与技术学院，长春 130026

摘要：为避免双曲 Radon 变换在消除多次波和提取速度差异的过程中出现假频现象，对地震资料处理造成一定的影响。笔者在时间域对最小二乘双曲 Radon 变换中的曲率参数和最小二乘迭代次数进行了研究，计算出平衡准确度和计算量的最佳参数选取范围为，曲率参数在30～40之间，迭代次数在6～10之间。理论模型测试和实际资料处理结果表明，适当的参数选取能够在保证准确度的同时极大减小计算量，有利于双曲 Radon 变换的实际应用。

关键词：双曲 Radon 变换；最小二乘法；参数采样

中图分类号：P631.443 **文献标识码**：A **doi**：10.3969/j.issn.1004-5589.2017.02.024

Analysis of parameters in hyperbolic Radon transform

XING Hui-ting, LIU Cai, LI Bing-xiu, LIU Yang, WEI Zhong-yu

College of Geo-exploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China

Abstract: In order to avoid the pseudo-frequency in the process of eliminating multiples and extracting velocity difference of hyperbolic Radon transform, which caused certain impacts on seismic data processing, the authors studied the curvature parameters and iteration numbers of least square hyperbolic Radon transform in time domain and figured out the optimum range of the parameter of 30 to 40 for curvature sampling and 6 to 10 for the iteration numbers. Synthetic model and real data tests show that proper setting of parameters could ensure the accuracy and reduce the computing time, which is beneficial for the application of hyperbolic Radon transform.

Key words: hyperbolic Radon transform; least-squares; sampling parameters

0 引言

双曲 Radon 变换在地震勘探学领域，如速度分析[1]、波场分离[2]、压制多次波[3]、偏移反演[4]、去噪及地震道恢复[5]等诸方面均得到较好的应用。Radon 提出 Radon 变换原理之后，Sehultz 和 Clearbout[6]将 Radon 变换引入地球物理学的数字处理中；Thorson 通过研发逆速度叠加提出双曲 Radon 变换；Thorson 和 Clearbout 将双曲 Radon 变换应用于速度分析之中。广义 Radon 变换是沿给定的路径进行积分计算，积分路径越接近地震同向轴的时差曲线，得到的正变换效果就越好，模型空间域的分辨率就越高。线性 Radon 变换的积分路径是直线，而双曲 Radon 变换的积分路径是双曲线，对于地震学的射线模型来说，波形轨迹更加接近于双曲线，因此，相比直线或抛物倾斜叠加，双曲 Rdaon 变换更加有利于地震数据处理，可减少变换噪音和能量弥散，从而提高资料处理质量，得到了广泛的普及

收稿日期：2016-11-19；**改回日期**：2017-02-10

基金项目：国家自然科学基金项目（41522404，41430322）、国家973计划项目（2013CB429805）联合资助.

通讯作者：刘财（1963－），男，博士生导师. 主要从事地震波场正反演理论，地震数据处理以及结合地质、地球物理等研究. E-mail：liucai@jlu.edu.cn

和应用[7]。

最小二乘方法是一种求解反演问题的有效方法，能够较好地计算出 Radon 变换的结果。Thorson 和 Claerbout，Beylkin[8]，Kostov[9] 分别研究了计算 Radon 变换的最小二乘方法。Yilmaz 和 Tanner[10] 在时间–空间域设计了高分辨率最小二乘倾斜叠加算子，采用迭代反演方法求解大型线性稀疏算子。本文采用最小二乘反演方法在 T–X 域内研究双曲 Radon 变换的分辨率问题。采用共轭梯度法作为最小二乘的一种迭代求解方法，能够得到反演问题的局部最优解，因此经常被用于 Radon 变换的计算中[11]。其迭代次数对 Radon 变换的准确度和计算效率有着十分重要的影响。

对双曲 Radon 变换中的曲率参数和最小二乘迭代次数进行误差数值分析和研究，计算出最佳参数选取范围，使得计算误差和效率达到最优化。其结果将有利于双曲 Radon 变换在地震勘探学领域地震资料数字处理中的进一步研究与应用。

1 理论基础

1.1 双曲 Radon 变换理论

对于在时间域中的地震数据 $d(h,t)$，在 Radon 域中沿双曲线的积分路径叠加公式为[11]：

$$m(q,\tau) = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} d(h,t = \sqrt{\tau^2 + q^2h^2})\,\mathrm{d}h \quad (1)$$

式中：t 为双程走时；h 为偏移距；$m(\tau,q)$ 为 Radon 域数据；τ 为双向零偏移距走时（或交叉时）；$q = 1/v^2$，$1/v$ 代表慢度。同样，沿慢度轴的共轭变换求和公式为：

$$d(q,\tau) = \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} m(q,m(\,,\tau = \sqrt{\tau^2 - q^2h^2})\,\mathrm{d}q \quad (2)$$

离散化后的方程（1），（2）形式：

$$m(q,\tau) = \sum_h d(h,t = \sqrt{\tau^2 + q^2h^2}) \quad (3)$$

$$d(h,t) = \sum_q m(q,\tau = \sqrt{t^2 - q^2h^2}) \quad (4)$$

将方程（3），（4）写成矩阵形式：

$$m = L^H d \quad (5)$$

$$d = Lm \quad (6)$$

式中：d 表示 (h,t) 域数据；向量 m 表示 (τ,q) 域数据；L 是算子矩阵，它可以把行 (τ,q) 的一点变换到数据空间 (h,t) 域的一条双曲线同相轴。其正变换可由最小二乘方法导出。由 $d = Lm$ 使下面目标函数取极小值，便可得到 m：

$$\{\Phi = d - Lm^2\}Min \quad (7)$$

对 m 求导，得最小二乘解：

$$\hat{m} = (L^{\mathrm{T}}L)^{-1}L^{\mathrm{T}}d = (L^{\mathrm{T}}L)^{-1}m_0 \quad (8)$$

式中：$\hat{m}$ 是由转置或伴随算子计算的低分辨率速度叠加；τ 是由最小二乘反演法计算得到的分辨率相对高的速度叠加。

1.2 双曲 Radon 变换曲率参数的采样

在实际地震资料处理中，双曲 Radon 变换在离散条件下进行，因此变换中曲率参数的正确选取严重制约变换精度的高低。通常在 t 或 τ 方向的参数采样一般不会出现假频现象，而参数的选取则不然。为了得到高分辨率的变换结果，本文给出曲率参数的选取准则[12]。

由于：

$$\Delta q = q_k - q_{k-1}, k = 1,\cdots,m \quad (9)$$

$$q = \frac{1}{v^2} \quad (10)$$

把（10）式代入（9）式中，可得到：

$$\Delta q = \frac{1}{v_k^2} - \frac{1}{v_{k-1}^2} \quad (11)$$

把 $\Delta v = v_{k-1} - v_k$ 代入式（11），公式可写为：

$$\Delta q = \frac{v_{k-1} + v_k}{v_{k-1}^2 v_k^2} \cdot \Delta v \quad (12)$$

因为 v_k 与 v_{k-1} 比较接近，即 $v_{k-1} \approx v_k$，于是（12）式进一步化简得到：

$$\Delta q = \frac{2}{v_k^3} \cdot \Delta v \quad (13)$$

设原始数据中最大有效反射速度为 $v_{\max}$，要使（13）式对所有的有效波场成份均成立，则式中 v_k 应替换为 $v_{\max}$，当在 csp 或 cmp 道集上做变换时，选取的 Δv 范围通常为，从而得到 Δq 的临界值关系：

$$\Delta q_c = \frac{2}{v_{\max}^3} \cdot \Delta v \tag{14}$$

因此，对参数 q 的采样值的选取是有限制的。当确定了 Δq 的值后，再根据 $q = 1/v^2$ 给出 q 的初始值 q_0 和最大值 $q_{\max}$。这样做既不多耗费计算量又能保证计算的正确性。

1.3　双曲 Radon 变换最小二乘迭代次数的采样

为了提高 Radon 域中的分辨率，将最小二乘方法带入公式（6）中，得到最小化估计公式[13]：

$$J = \| d - Lm \|^2 \tag{15}$$

对 J 中 m 求偏导，并使之趋于 0，可得最小二乘变换结果公式为：

$$(L^H L)m = L^H d \tag{16}$$

同时引入阻尼因子，反演后得到：

$$(L^H L + \mu I)m = L^H d \tag{17}$$

式中：μ 为阻尼因子；I 为单位矩阵；算子矩阵 L 的维数为 $(N_T N_H) \times (N_T N_P)$。

为了应用最小二乘的共轭梯度法解决方程（17），首先需要得到初始值 m_0 的结果：

$$p_0 = r_0 = L^H d - (L^H L + \mu I)m_0 \tag{18}$$

一般情况下，可令 $m_0 = 0$，则方程（17）可以进行推导：

$$s_i = Lp_i \tag{19}$$

$$ss_i = L^H s_i + \mu p_i \tag{20}$$

$$\alpha_{i+1} = (r_i, r_i)/(p_i, ss_i) \tag{21}$$

$$m_{i+1} = m_i + \alpha_{i+1} p_i \tag{22}$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_{i+1} ss_i \tag{23}$$

$$\beta_{i+1} = (r_{i+1}, r_{i+1})/(r_i, r_i) \tag{24}$$

$$p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_{i+1} p_i \tag{25}$$

式中：$i = 0, 1, 2, \cdots, K$，表示迭代次数。根据共轭梯度法的公式可以看出，迭代次数越大，搜索方向越准确，计算结果越接近最优解。然而计算效率随着迭代的增加而变低，当迭代次数较大时，巨大的计算量将严重制约 Radon 变换的工作效率。

2　模型测试

在理论模型测试中，使用一个 17 层地层结构，地震波速度从 2 000 m/s 增加到 2 500 m/s 的模型数据进行测试（图 1）。对模型数据进行最小二乘双曲 Radon 变换并重建，得到相对能量误差如图 2 所示。通过图 2 可以看出随着地层速度和迭代次数的增加，重建误差逐渐减小并趋近一个常值。为了直观看出重建误差随速度和迭代次数的变化，给出不同参数下模型数据的重建图和误差图（图 3 – 5）。理论模型测试表明，当曲率参数采样和迭代次数较小时，双曲 Radon 变换重建误差较大。当参数较大时，重建误差基本保持不变，双曲 Radon 变换的精度提高有限，而此时计算量得到显著增加，计算效率下降。因此，取曲率采样在 30 ~ 40，迭代次数 6 ~ 10 之间比较合适。

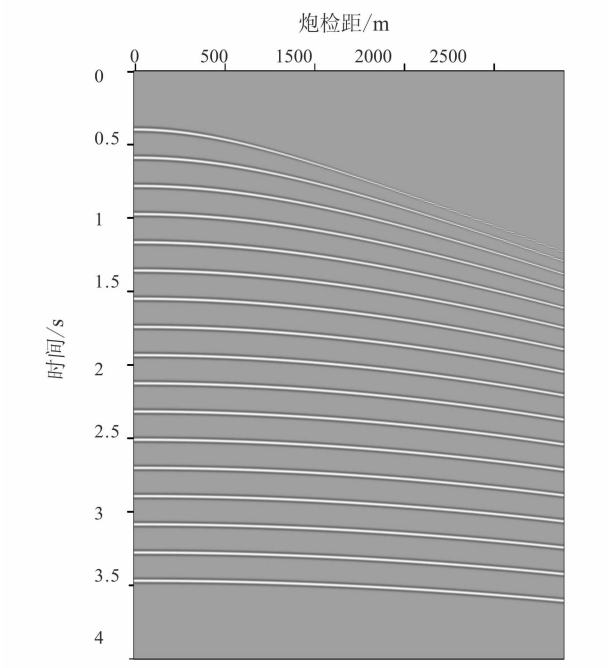
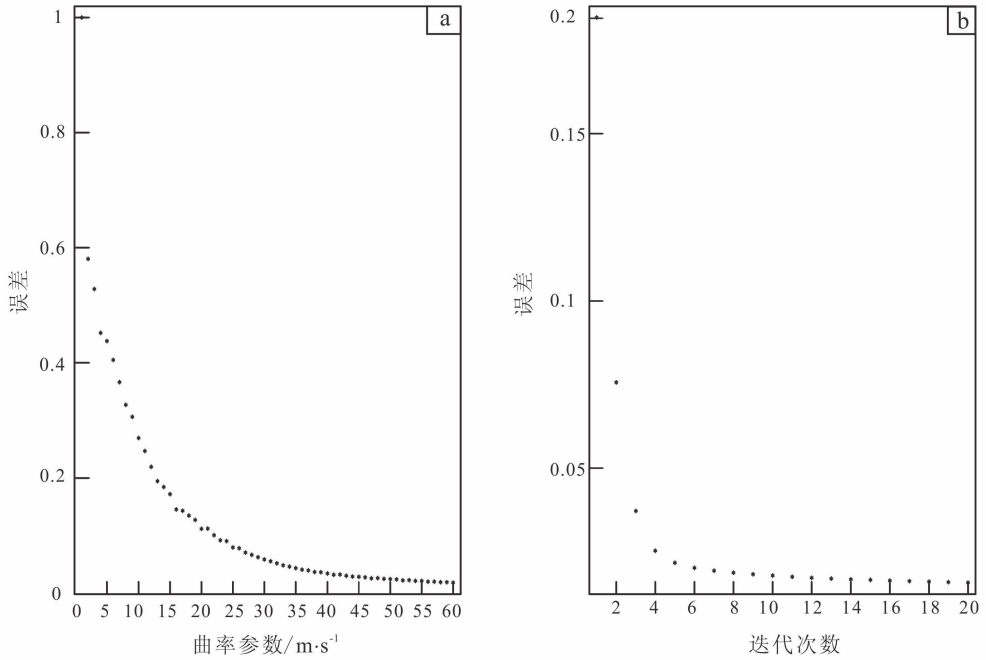


图 1　合成 CMP 道集

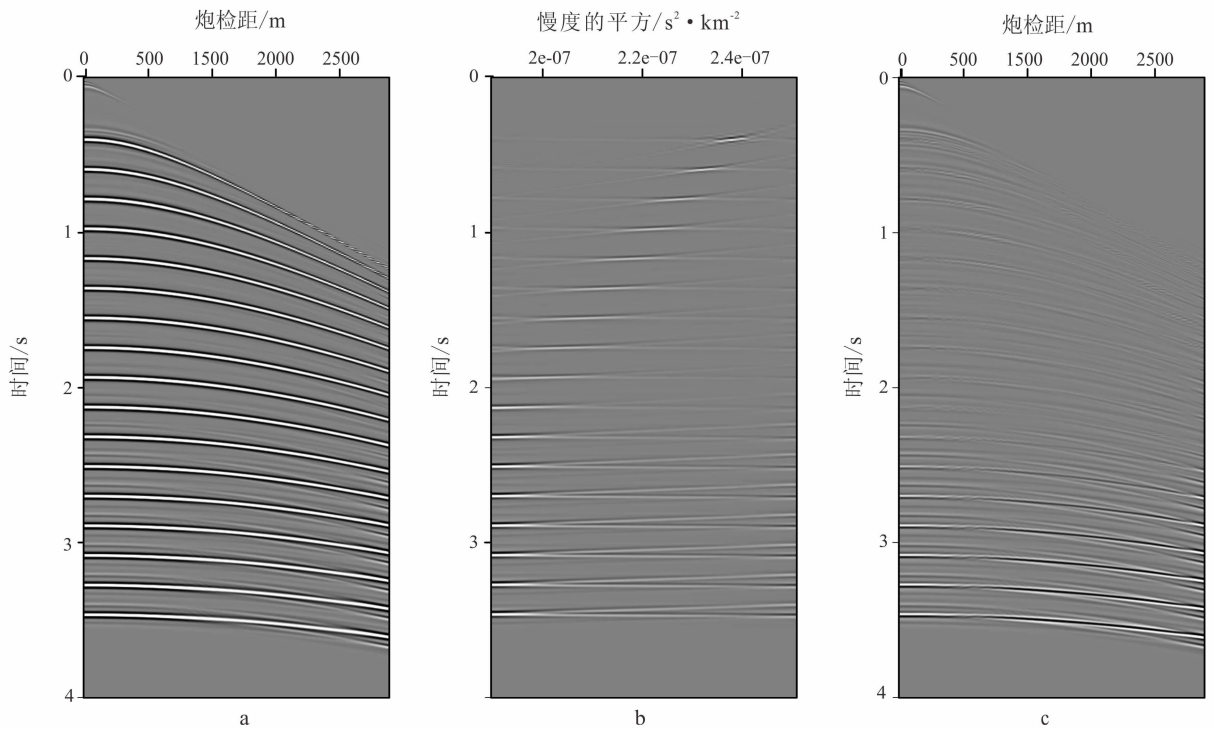
Fig. 1　Synthetic CMP gather



a. 误差与曲率参数关系；b. 误差与迭代次数关系.

图 2 重建相对能量误差（模型）

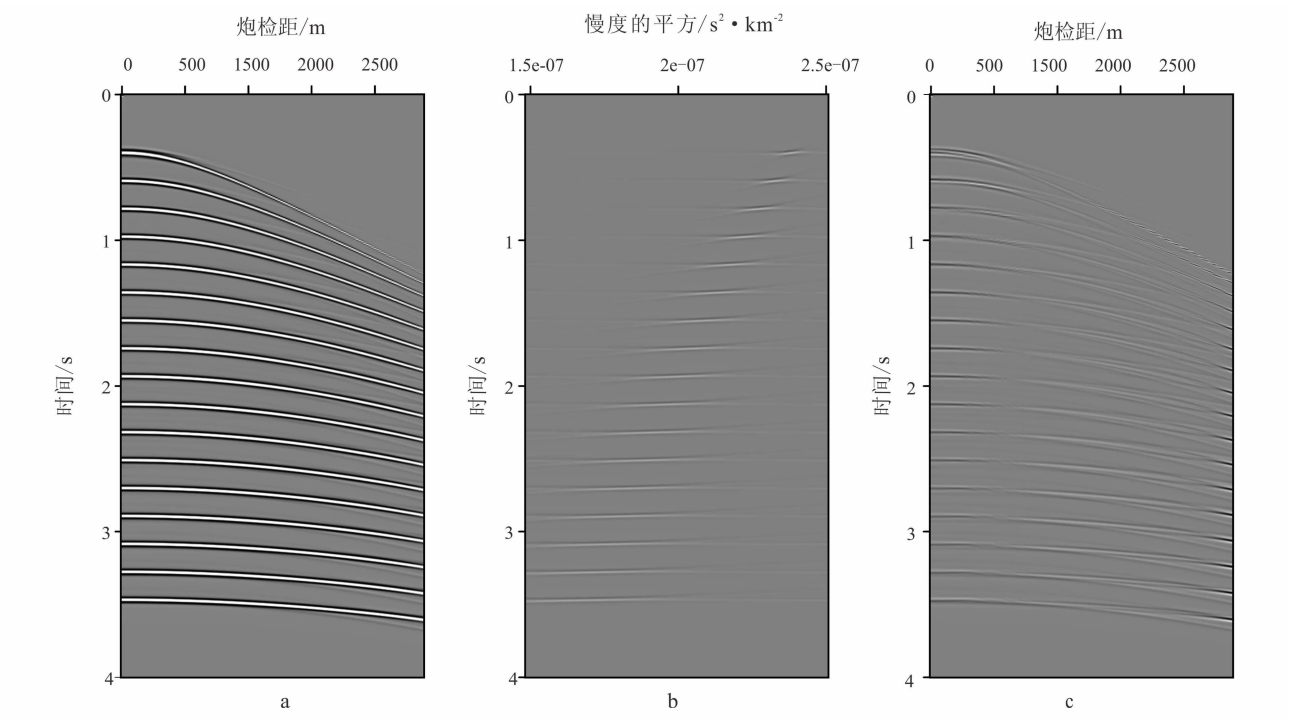
Fig. 2 Reconstruction of relative energy error



a. 重建数据；b. 双曲 Radon 正变换；c. 重建误差.

图 3 曲率参数采样试验（nv = 30，niter = 20）

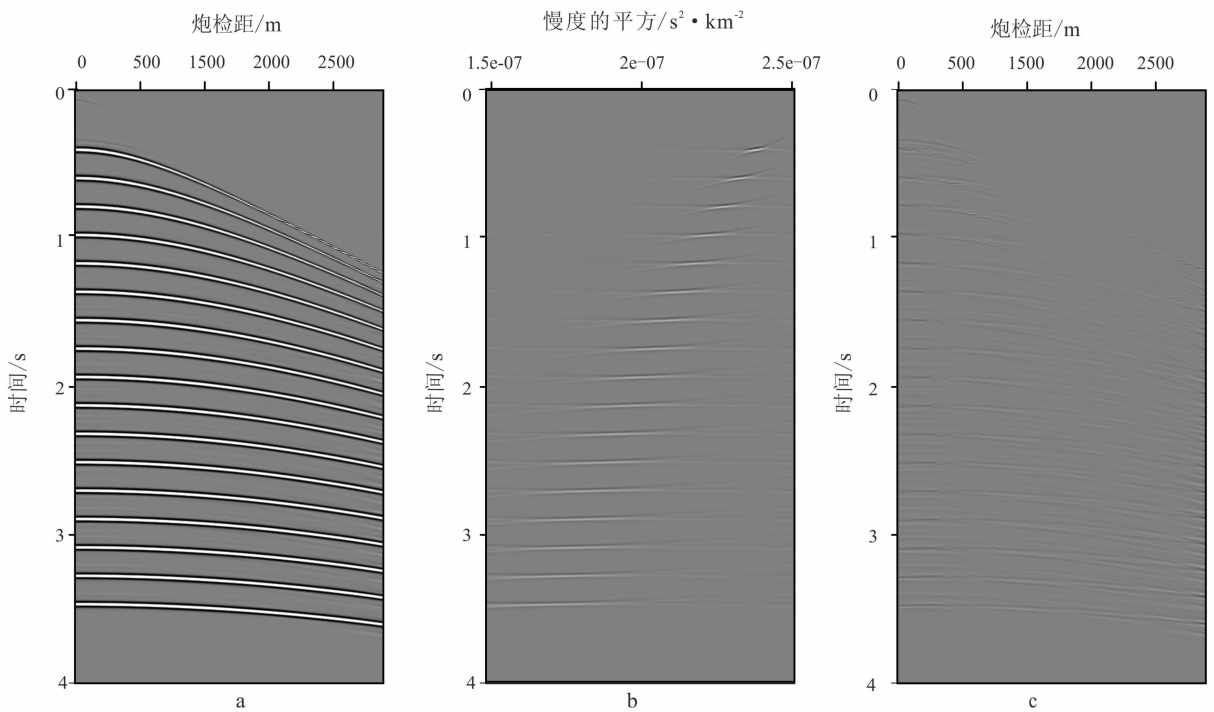
Fig. 3 Sampling test for curvature parameters



a. 重建数据；b. 双曲 Radon 正变换；c. 重建误差.

图 4　曲率参数采样试验（nv = 60，niter = 4）

Fig. 4　Sampling test for curvature parameters



a. 重建数据；b. 双曲 Radon 正变换；c. 重建误差.

图 5　曲率参数采样试验（nv = 60，niter = 20）

Fig. 5　Sampling test for curvature parameters

3 实际资料试算

为进一步验证理论测试结果的有效性，使用实际地震资料进行最小二乘双曲 Radon 变换参数误差分析。图 6 是实际地震资料 CMP 道集，对其进行双曲 Radon 变换重建，得到相对能量误差如图 7 所示。对比图 2 和图 7，可以发现两者有着较好的对应。实际地震数据的重建图和误差图（图 8 – 10）也表明重建误差遵循理论测试的结论，随着参数的增加而减小并趋近常值。而当参数取值较大时，Radon 变换的计算量大大增加，使其无法适用于实际应用。实际资料试算结果表明，曲率采样在 30 ~40，迭代次数 6 ~10 之间是最小二乘双曲 Radon 变换的最佳参数选择，能在误差允许范围内得到最高的计算效率。

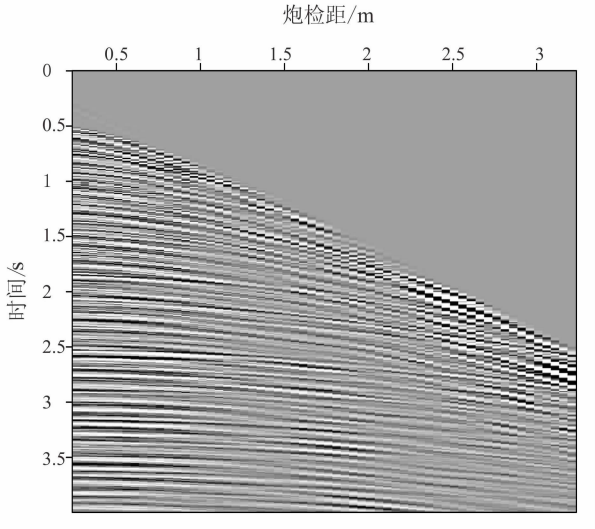
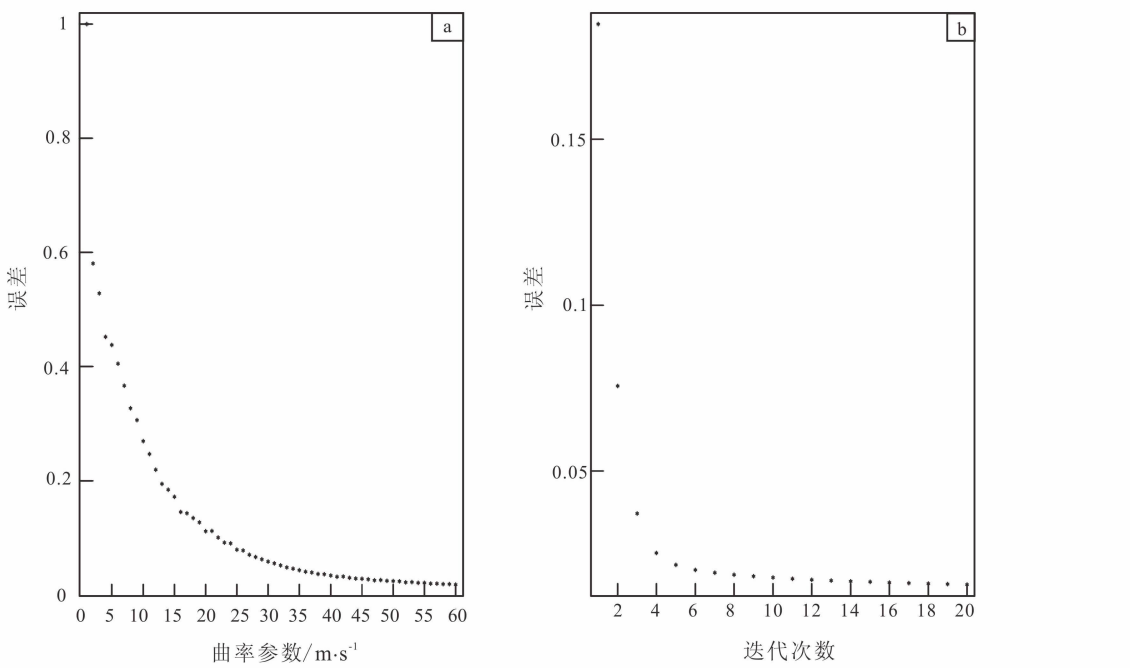


图 6 实际地震数据

Fig. 6 Actual seismic data



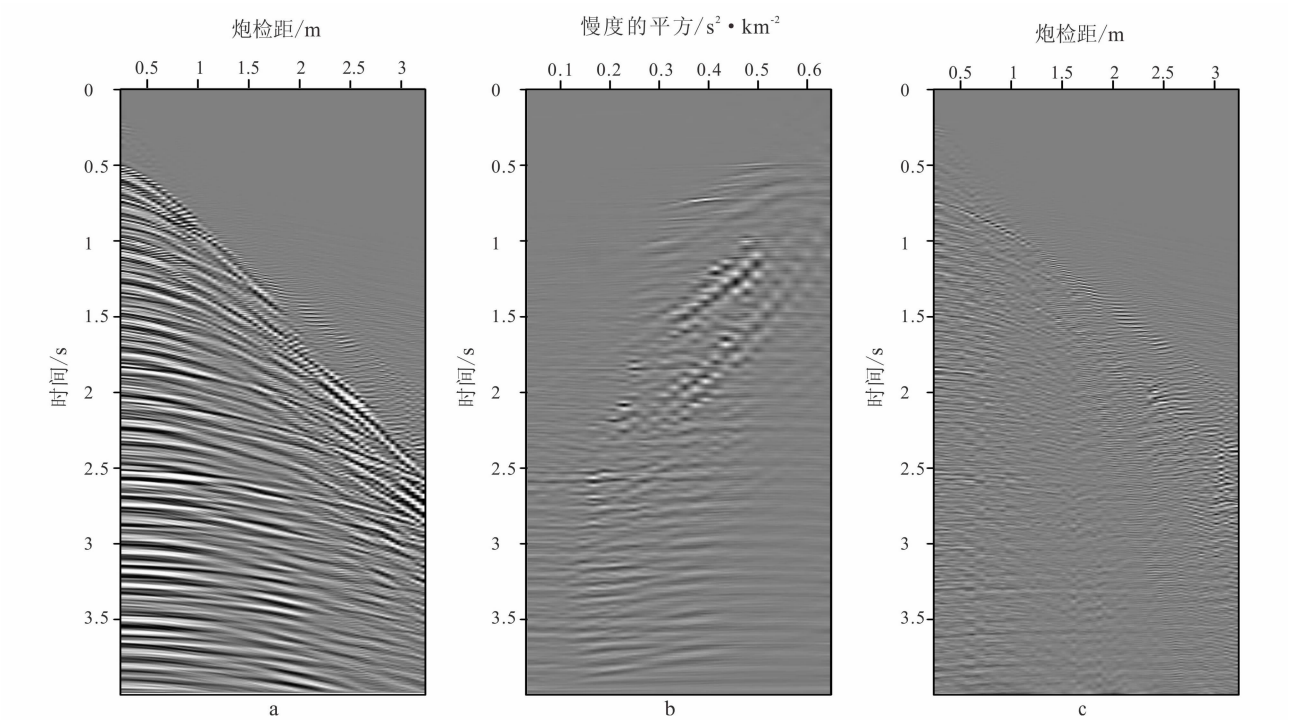
a. 误差与曲率参数关系；b. 误差与迭代次数关系.

图 7 重建相对能量误差（实际数据）

Fig. 7 Reconstruction of relative energy error

4 结论

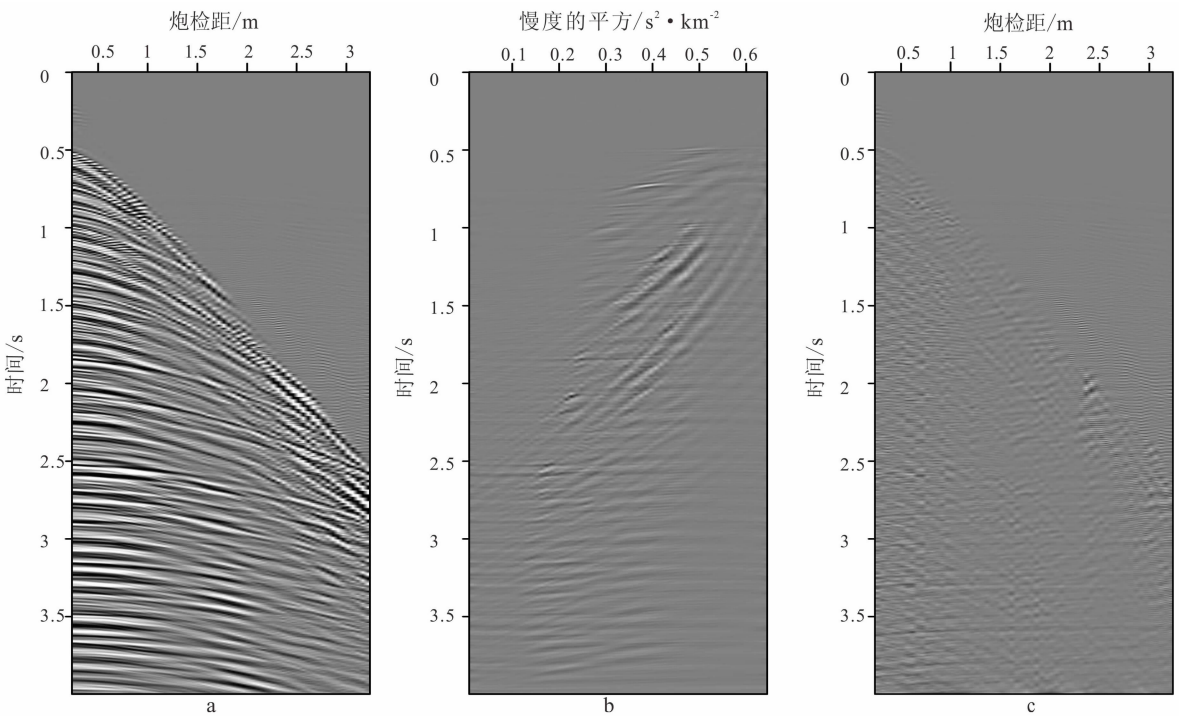
（1）在 q 方向曲率采样点数不同会导致双曲 Radon 线变换中正、反变换的不协调，进而会引起双曲 Radon 变换去噪前、后振幅失真问题，会对实际地震资料处理造成一定的影响。为避免这种问题本文给出了可以得到权衡准确度变换结果的最优参数范围。



a. 重建数据；b. 双曲 Radon 正变换；c. 重建误差.

图 8　曲率参数采样试验（nv = 30，niter = 10）

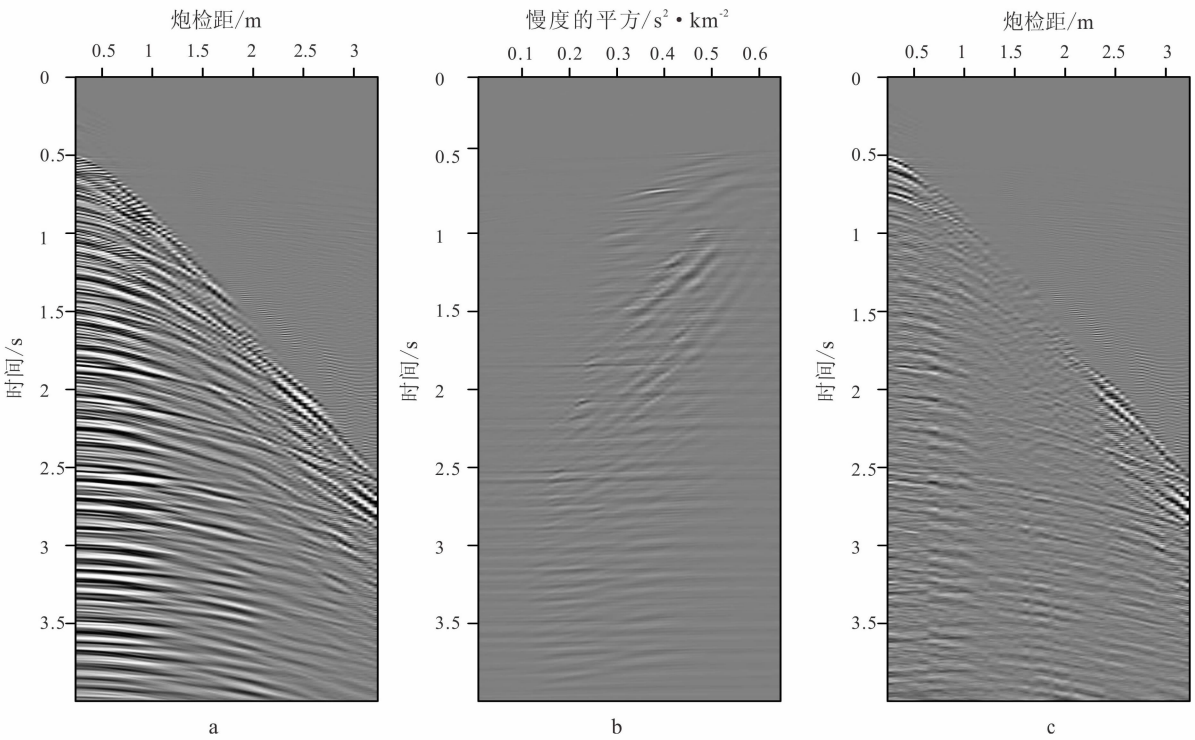
Fig. 8　Sampling test for curvature parameters



a. 重建数据；b. 双曲 Radon 正变换；c. 重建误差.

图 9　曲率参数采样试验（nv = 60，niter = 10）

Fig. 9　Sampling test for curvature parameters



a. 重建数据；b. 双曲 Radon 正变换；c. 重建误差.

图 10 曲率参数采样试验（nv = 60，niter = 2）

Fig. 10 Sampling test for curvature parameters

（2）通过共轭梯度法求解最小二乘算法的迭代次数问题，得到迭代次数对双曲 Radon 变换的准确度和计算量有着重要影响。由于双曲 Radon 变换精度高，本文应用共轭梯度算法大大提高了计算速度，并且得到了局部最优解，保证了计算的效率也提高了精度。本文通过理论模型测试和实际资料处理结果分析可得到只有平衡准确度和计算量的关系，选择最佳参数才能使双曲 Radon 变换准确高效，得到满足实际应用的结果。

参考文献：

[1] Sacchi M D, Ulrych T J. High-resolution velocity gathers and offset space reconstruction [J]. Geophysics, 1995, 60 (4): 1169-1177.

[2] 冯晅，张先武，刘财，等. 带有多道相关的抛物线 Radon 变换法分离 P-P、P-SV 波 [J]. 地球物理学报，2011，54 (2)：304-309.
FENG Xuan, ZHANG Xian-wu, LIU Cai, et al. Separating coherence [J]. Chinese Journal of Geophysics 2011, 54 (2): 304-309.

[3] 石颖，王维红. 基于波动方程预测和双曲 Radon 变换联合压制表面多次波 [J]，地球物理学报，2012，55 (9)：3115-3125.
SHI Ying, WANG Wei-hong. Surface-related multiple suppression approach by combining wave equation prediction and hyperbolic Radon transform [J]. Chinese Journal of Geophysis, 2012, 55 (9): 3315-3125.

[4] 黄新武，吴律，宋炜. 拉冬投影法三维叠前深度偏移 [J]. 地球物理学报，2004，47 (2)：321-326.
HUANG Xin-wu, WU Lü, SONG Wei. 3D prestack depth migration with Radon, prestack [J]. Chinese Journal of Geophysis, 2004, 47 (2): 321-326.

[5] 王维红，裴江云，张剑锋. 加权抛物 Radon 变换叠前地震数据重建 [J]. 地球物理学报，2007，50 (3)：851-859.
WANG Wei-hong, PEI Jiang-yun, ZHANG Jian-feng. Prestack seismic data reconstruction using weighted parabolic Radon transform [J]. Chinese Journal of Geophysis, 2007, 50 (3): 851-859.

[6] Thorson J R, Claerbout J F. Velocity-stack and slant stack stochastic inversion [J]. Geophysics, 1985, 50 (12): 2727-2741.

[7] 吴律. τ-p 变换及应用 [M]. 北京：石油工业出版社，1993：43-59.
WU Lü. τ-p transform and its application [M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 1993: 43-59.

[8] Beylkin G. Discrete Radon transform [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1987, 35 (2): 162-172.

[9] Kostov C. Toeplitz structure in slant-stack inversion [M] //SEG Technical Program Expanded Abstracts 1990. Society of Exploration Geophysicists, 1990: 1618-1621.

[10] Yilmaz O, Taner M T. Discrete plane-wave decomposition by least-mean square-error method [J]. Geophys, 1994, 59 (6): 973-982.

[11] 刘喜武，刘洪，李幼铭. 高分辨率 Radon 变换方法及其在地震信号处理中的应用 [J]. 地球物理学进展，2004，19 (1)：8-15.
LIU Xi-wu, LIU Hong, LI You-ming. High-resolution Radon transform method and its application in seismic signal processing [J]. Progress in Geophysics, 2004, 19 (1): 8-15.

[12] 孔祥琦. 基于双曲 Radon 变换表面多次波衰减方法研究：硕士学位论文 [D]. 大庆：东北石油大学，2012.
KONG Xiang-qi. Research on a surface multiple attenuation method of based on hyperbolic Radon transform: master's degree thesis [D]. Daqing: Northeast Petroleum University, 2012.

[13] Jiang X, Zheng F, Jia H, et al. Time-domain hyperbolic Radon transform for separation of PP and P-SV wavefields [J]. Studia Geophysica et Geodaetica, 2016, 60 (1): 91-111.