

文章编号: 1004—5589 (2021) 03—0664—08

基于程函方程快速行进法的地震走时层析成像法

李天扬, 李桐林, 孟相禹

吉林大学 地球探测科学与技术学院, 长春 130026

摘要: 地震走时层析成像法是一种利用不同地震台站连续接收到的地震事件, 利用地震走时断层扫描反演地球内部速度分布的方法, 主要分为正演(射线追踪)和反演两个环节。首先正演利用基于程函方程的快速行进法, 实现了对入射波走时场和反射波走时场的计算, 接着进行了射线追踪与走时灵敏度矩阵的计算, 最后反演采用了子空间算法实现了反射波走时反演, 反演成像结果可以分辨出异常体的形状和位置。

关键词: 入射波; 反射波; 快速行进法; 子空间反演法

中图分类号: P631.4 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1004-5589.2021.03.018

Seismic travel time tomography based on fast marching method of eikonal equation

LI Tian-yang, LI Tong-lin, MENG Xiang-yu

College of Geo-exploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China

Abstract: Seismic travel time tomography is a method to retrieve the velocity distribution inside the earth by using the seismic events continuously received by different seismic stations and the seismic travel time fault scanning. It is mainly divided into two parts of forward (ray tracing) and inversion. Firstly, the fast marching method based on the eikonal equation is used to calculate the travel time field of incident wave and reflected wave. Secondly, the ray tracing and travel time sensitivity matrix are calculated. Finally, the subspace inversion method is used to realize the travel time inversion of reflection wave. The inversion imaging results can well distinguish the shape and position of abnormal bodies.

Keywords: incident wave; reflected wave; fast marching method; subspace inversion method

0 引言

地震走时层析成像法是一种利用不同地震台站连续接收到的地震事件, 利用地震走时断层扫描反演地球内部速度分布的方法。由1977年发展至今已有40多年的历史, 已成为如今对地下速度结构探测的重要研究手段, 在火山活动、板块运动学和

地幔流等领域的研究中扮演着重要的角色^[1]。

地震层析成像过程主要包括正演和反演两个环节。早期的层析成像法正演采用的是传统的射线追踪方法, 例如试射法、弯曲法, 但由于其追踪过程中存在多路径问题, 致使反演不稳定且多解, 故针对该问题相继提出了基于程函方程数值解的地震波走时计算方法, 主要包括有限差分法^[2]、快速推

收稿日期: 2021-03-13; 改回日期: 2021-05-08

基金项目: 国家科技重大专项大型油气田及煤层气开发子课题(2016ZX05026007-001)、国家重点研发计划(2017YFC0601606)和中国博士后科学基金特别资助(站前)项目(2020TQ0114)资助。

通讯作者: 李桐林(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事电磁场和位场理论及其应用研究。E-mail: lit@jlu.edu.cn

进法^[3-4]和快速扫描法^[5-7]。近几十年来, 最短路径法^[8-10]等方法发展起来。反演环节早期的地震层析成像法中应用的阻尼最小二乘法、奇异值分解法, 随后发展的模拟退火法^[11]、共轭梯度法、迭代重建法及子空间反演法等诸多方法都可以针对不同模型应用于反演环节中。

地震层析成像中不同的波也具有不同的用处, 其中最常见有初至波、反射波。Rawlinson et al.^[12]将 FMM 正演算法与 Subspace 反演算法相结合利用远震初至波资料研究了澳大利亚 Murray 盆地的上地幔速度结构; 2015 年, 付翠^[13]正演利用旅行时线性插值射线追踪法以及反演的最小二乘因式分解法将初至波与反射波联合反演应用到井间地震中; 2017 年, 俞岱等^[14]利用旅行时线性插值法以及初至波旅行时反演实现了初至波层析成像并行运算; 查树贵^[15]通过对反射波走时信息加约束条件提高成像的分辨率; Wang et al.^[16]利用反射波振幅信息对模型速度的空间分布进行反演计算; 张云等^[17]在 2019 年基于多步快速行进法和子空间反演法实现了对二维起伏层状介质中的 P 波和反射波的反演。国内目前对于 FMM 算法以及利用其进行射线追踪不多见, 孙章庆等^[18-20]利用快速推进法迎风双线性插值法实现了三维地震波走时计算以及在复杂山地下和复杂海底中地震波的射线追踪和走时计算; 王晗等^[21]反演通过双曲 Radon 变换实现了对地震数据的重建; 肖汉等^[22]利用快速匹配法计算得到了 VTI 介质的走时。笔者在前人的工作基础上, 正演采用基于程函方程快速行进法 (FMM) 进行射线追踪, 实现了对入射波以及反射波的射线追踪, 反演采用了子空间反演法, 并且设计了理论模型进行反演, 并对各反演结果进行了分析。

1 正演理论

1.1 快速行进法解程函方程

快速行进法是射线追踪方法的一种, 主要用来求解非线性的程函方程来计算地震波走时场以及射线路径。程函方程是指导波前传播的物理现象表达式, 其二维直角坐标系下的程函方程为:

$$\left[\frac{\partial t(x, z)^2}{\partial x} + \frac{\partial t(x, z)^2}{\partial z} \right] = S^2(x, z) \quad (1)$$

式中: t 为地震波的旅行时间; s 为地震波在介质中传播的慢度。程函方程的解即为对 t 的求解, 采用迎风差分方法对其离散并简化为:

$$[\max(D_{i,j}^{-x}t, D_{i,j}^{+x}t, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{-z}t, D_{i,j}^{+z}t, 0)^2]^{1/2} = s_{i,j} \quad (2)$$

式中: $D_{i,j}^{-x}t$ 、 $D_{i,j}^{+x}t$ 、 $D_{i,j}^{-z}t$ 、 $D_{i,j}^{+z}t$ 表示为网格节点 (i, j) 处的旅行时函数 t 分别在 x 和 z 方向上的向前、向后的差分算子, 一阶迎风差分算子为:

$$\begin{aligned} D_{i,j}^{-x}t &= \frac{t_{i,j} - t_{i,j-1}}{\Delta x}, D_{i,j}^{+x}t = \frac{t_{i,j+1} - t_{i,j}}{\Delta x}, \\ D_{i,j}^{-z}t &= \frac{t_{i,j} - t_{i-1,j}}{\Delta z}, D_{i,j}^{+z}t = \frac{t_{i+1,j} - t_{i,j}}{\Delta z} \end{aligned} \quad (3)$$

Rawlinson and Sambridge 将一、二、三阶的算子进行了精度上和计算效率上的比较, 得到了一阶算子精度达不到标准, 二阶、三阶的精度差异很小, 但是二阶算子的计算效率远远高于三阶算子的结论, 故通常应用时选择二阶快速行进法。二阶迎风差分算子为:

$$\begin{aligned} D_{i,j}^{-x}t &= \frac{3t_{i,j} - 4t_{i,j-1} + t_{i,j-2}}{2\Delta x}, D_{i,j}^{+x}t = \frac{3t_{i,j} - 4t_{i,j+1} + t_{i,j+2}}{2\Delta x}, \\ D_{i,j}^{-z}t &= \frac{3t_{i,j} - 4t_{i-1,j} + t_{i-2,j}}{2\Delta z}, D_{i,j}^{+z}t = \frac{3t_{i,j} - 4t_{i+1,j} + t_{i+2,j}}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (4)$$

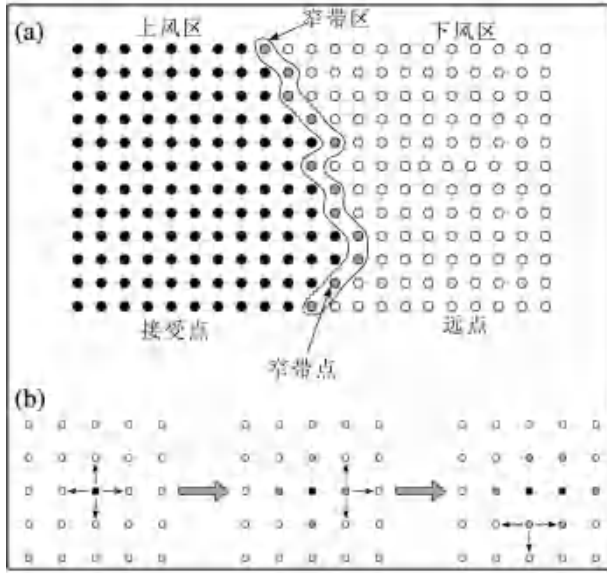
走时 t 可通过对式 (2) 的离散程函方程解得, 其流程是选取需要计算的节点以及该节点上下左右 4 个方向结点并向波前拓展的方向建立差分格式, 解出该方程的黏性解即为该节点的走时。

1.2 快速行进法解程函方程求取波前的方法

通过快速行进法得到的程函方程的解即为波前。由于快速行进法是一种基于网格的射线追踪方法, 因此要描述其在网格中如何将波前推进。

如图 1a 所示, 网格中所有的点划分为 3 个区域, 分别为上风区域、窄带及下风区域。其中上风区域中的点是在波前的后面, 称为 alive 点, 其走时是已知; 窄带中的点是在波前上, 称为 close 点, 走时虽然已经算出, 但是还没有进行更新; 下风区域中的点在波前的前面, 称为 far 点, 其走时还未进行计算。

图 1b 所示为窄带原理在源点进行波前演变的步骤。alive 点的走时是已经计算出来的, 使用离



(a) 窄带方法原理; (b) 窄带从一个源点向外延伸。

图1 窄带法原理以及窄带从一个源点向外延伸

Fig.1 Principle of narrow band method and narrow band extending from a source point

散化公式计算出 close 点走时, 然后选择其中值最小的变成 alive 点, far 点没有计算值, 窄带是由计算出的 close 点不停地向前演变。在这个过程中, 新的 alive 点不断的被标记, 并持续更新邻近的 close 点和 far 点, 窄带的传播形状近似为初至波前的形状, 快速行进法使窄带沿着网格传播, 计算结束的标志是所有的点变成 alive 点。

1.3 射线求取以及反射走时雅克比矩阵的计算

从接收点开始逐点寻找走时场梯度的最大下降方向, 该方向点的连线即为接收点到源点之间的射线路径。首先要找到接收点位置并记下, 然后设置每一步射线增量路径长度进行梯度的计算, 计算完每一步之后得到的点记下并继续上一步的计算直到设置的界面位置 (此过程采用的是已经计算过的反射波场), 记下界面上的点并继续以上操作直到源点为止 (此过程采用的是已经计算过的入射波场), 连接此过程的点即为一条入射波和反射波的射线路径。

在二维直角坐标系中, 模型任一点 P 可表示为 (x, z) , 根据射线理论, 由第 i 个源点经反射点到第 j 个接收点的走时 $t_{i,j}$ 可表示为:

$$t_{i,j} = \int_{R_{ij}} \frac{ds}{v(x,z)} \quad (5)$$

式中: ds 为第 i 个震源到第 j 个检波器的射线路径 R_{ij} 上的线积分元; $v(x, z)$ 为沿着该射线路径上的速度函数, 当模型单元网格化后, 沿着射线路径 R_{ij} 上的走时可以写成求和的形式:

$$t_{i,j} = \sum_k^N \int_{R_{ij,k}} \frac{ds}{v(x,z)} \quad (6)$$

式中: N 为射线穿过的单元总数; $R_{ij,k}$ 、 $v(x, z)$ 分别为射线穿过第 k 个单元的长度和速度分布。在对速度进行反演时, Frechet 偏导数矩阵包含了走时关于速度变化的导数, 其公式为:

$$\Delta t_{ij} = t_{i,j} = \sum_k^N \frac{\partial t_{ij}}{\partial v_k} \Delta v_k \quad (7)$$

当射线穿过某一个网格单元时, 走时对速度的一阶偏导数可用射线两端点导数的平均值代替:

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial v_k} \sum_k \int_{k_j}^k f_c(x,z) ds = \sum_k \frac{1}{2} [f_{ki}(x,z) + f_{kj}(x,z)] \quad (8)$$

式中的:

$$f_c(x,z) = - \sum_k \frac{BV(k)}{v_{c,k}^2(x,z)} \quad (9)$$

式中: $c = k_i, k_j, k_i, k_j$ 是穿过第 k 个单元射线段的两个端点; $BV(k)$ 即为网格单元速度; $f_c(x, z)$ 即为所求 Frechet 导数矩阵也就是雅克比矩阵。

2 反演理论以及算法流程

2.1 反演理论

子空间算法是 Skilling et al.^[23] 在最大熵图像重建中提出的, 随后被诸多学者将其概念推广和改进, 并用其讨论了地震多参数的同时反演问题, 主要用于对速度以及界面的反演中。

走时层析成像方法反演可归结为如下目标函数求极小值的问题, 即:

$$S(m) = \frac{1}{2} [g(m) - d_{obs}]^T C_d^{-1} (g(m) - d_{obs}) + \varepsilon (m - m_0)^T C_m^{-1} (m - m_0) + \eta m^T D^T m \quad (10)$$

式中: $g(m)$ 和 d_{obs} 分别为理论走时以及观测走时; C_d^{-1} 和 C_m^{-1} 分别为数据协方差矩阵以及模型协方差矩阵的逆; m 和 m_0 分别为更新的模型以及初始模型; ε 为阻尼因子; η 为光滑因子; D 为二阶导数差分算子。

子空间反演法是在多个模型参数的子空间内同时沿着多个方向去寻找目标函数 $S(m)$ 的最小值, 算法的核心是将多个参数的模型扰动量用 p 维子空间的一维基向量 $\{a_j\}$, $j=1, 2, \dots, p$ 来表示, 即:

$$\delta m = \sum_{j=1}^p \mu_j a_j = A_\mu \quad (11)$$

上式中的 $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, $\mu = -[A^T \hat{H} A]^{-1} A^T \hat{\gamma}$ 为步长因子; $\hat{\gamma} = \frac{\partial s}{\partial m}$ 和 $\hat{H} = \frac{\partial^2 s}{\partial m^2}$ 分别为梯度向量矩阵以及 Hessian 矩阵向量。

由公式 (9) 可推出:

$$\hat{\gamma} = G^T C_d^{-1} [g(m) - d_{obs}] + \varepsilon C_m^{-1} (m - m_0) + \eta D^T D m \quad (12)$$

$$\hat{H} = G^T C_d^{-1} G + \hat{N}_m G^T C_d^{-1} [g(m) - d_{obs}] + \varepsilon C_m^{-1} + \eta D^T D \quad (13)$$

其中 Frechet 偏导数矩阵 $G = \frac{\partial g}{\partial m}$ 阵, 将表达式 (11)、(12) 带入到公式 (10) 里就能得到反演每次迭代时模型的更新量, 即:

$$\delta m = -A[A^T G^T C_d^{-1} G + (\varepsilon C_m^{-1} + \eta D^T D)A]^{-1} A^T \hat{\gamma} \quad (14)$$

公式 (13) 可以用来计算每次迭代中模型的更新量, 但是每次都要重新计算子空间的基础向量 A 、梯度向量 $\hat{\gamma}$ 和 Frechet 偏导数矩阵 G , 其中最重要的是计算 Frechet 偏导数矩阵以及构建基向量, 大多数子空间法构建基向量 $\{a_j\}$ 都是用模型空间中的上升速度最快的向量 $\gamma = C_m \hat{\gamma}$ 以及它的变化梯度, 本文也采用此种方法。对于已经给定的子空间维数 p , p 必须大于等于将要反演的参数的种类, 构造子空间基向量 $\{a_j\}$ ($j=1, 2, \dots, p$) 的具

体步骤如下:

- ①构建基向量 $a_1 = C_m \hat{\gamma}$;
- ②如果 $p \geq 2$, 则构造基向量公式如下:

$$\begin{aligned} a_2 &= H a_1 = C_m \hat{H} a_1 \\ &= C_m (G^T C_d^{-1} G + \varepsilon C_m^{-1} + \eta D^T D) a_1 \\ a_3 &= H a_2 = C_m \hat{H} a_2, \\ &\vdots \\ a_p &= H a_{p-1} = C_m \hat{H} a_{p-1} \end{aligned} \quad (15)$$

③采用奇异值分解法将①、②中构建的基向量标准正交化。

相比于传统的其他梯度类算法, 其优点是只需要对一个维数等于子空间维数的矩阵进行反演, 并正确选择跨越模型的子空间的基向量, 这个优点也使其实用性高于其他算法。

2.2 算法流程

依据快速行进法射线追踪理论以及子空间反演法为基础, 在 Windows 环境下运用 Fortran 语言编程实现。实现了对二维模型快速行进法的射线追踪以及对模型的反演。其中射线追踪过程为: ①给定初始模型并设置好网格范围以及源点接收点; ②在源点附近进行源的细化计算, 提高计算准确度; ③设置网格所有点为 far 点并开始计算; ④计算到网格底面使所有点计算成为 alive 点并备份计算所得网格时间场; ⑤将计算结束的网格区域再次设置为 far 点, 从保留了时间场的网格底面开始向接收点进行计算; ⑥到接收点计算结束后完成对入射波以及反射波波场的计算; ⑦如 1.3 所述完成对射线的追踪。反演流程如图 2 所示。正演反演结束后结果数据通过 matlab 和 surfer 绘制成图。

3 模型试算

采用理论模型进行试算, 网格剖分情况为 $26 \text{ km} \times 30 \text{ km}$ 。异常体情况如图 3、图 4 所示, 低速异常体和高速异常体大小形状位置均相同, 其中低速异常体背景速度为 5 km/s , 低速模型为速度 3 km/s ; 高速异常体背景速度为 5 km/s , 高速模型速度为 8 km/s 。

图 5、6、7 为分别为低速异常体和入射波场、反射波场及射线路径图, 由正演计算所得, 在图中

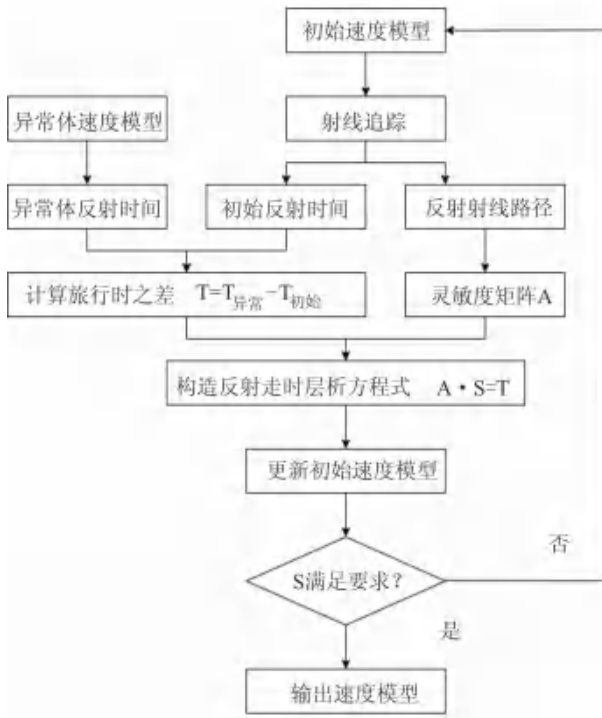


图2 反演流程图

Fig. 2 Inversion flow chart

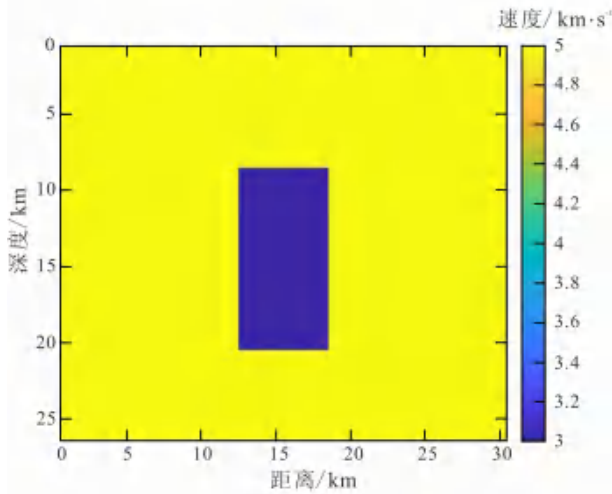


图3 低速异常体理论模型

Fig. 3 Theoretical model of low velocity abnormal body

可以看出对应异常体的位置；图8、9、10分别为高速异常体的入射波场、反射波场及射线路径图，图中可以看出对应位置异常体的位置。

图11和图12为低速异常体和高速异常体的反演结果，由反演结果可以看出无论是低速或者是高速异常体的空间位置与给定模型基本吻合，但是异

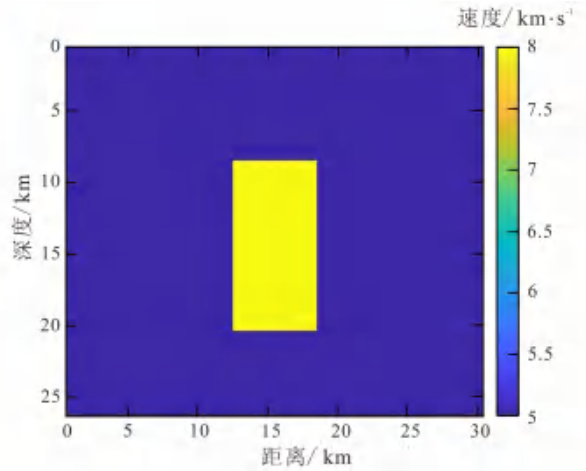


图4 高速异常体理论模型

Fig. 4 Theoretical model of high velocity abnormal body

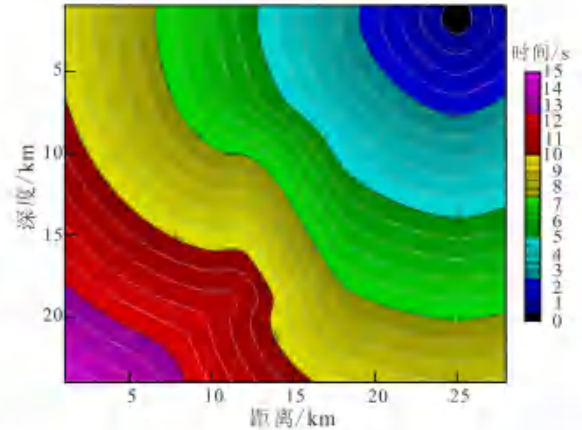


图5 低速异常体入射波场示意图

Fig. 5 Schematic diagram of incident wave field of low velocity abnormal body

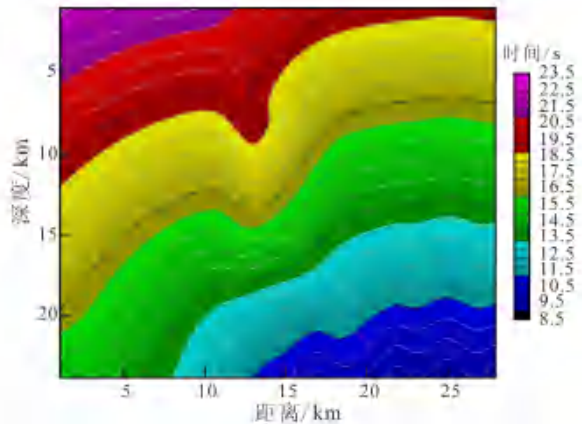


图6 低速异常体反射波场示意图

Fig. 6 Schematic diagram of reflection wave field of low velocity abnormal body

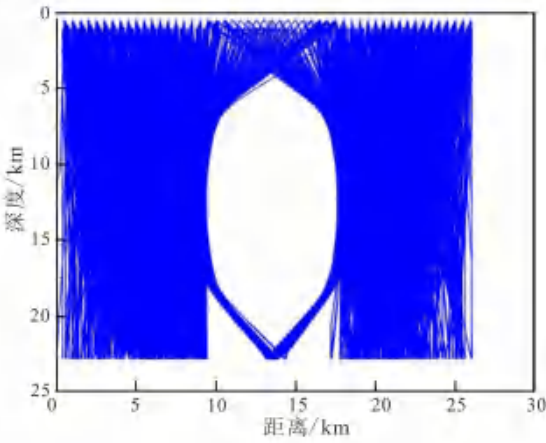


图 7 低速异常体射线路径示意图

Fig. 7 Schematic diagram of low velocity abnormal body ray path

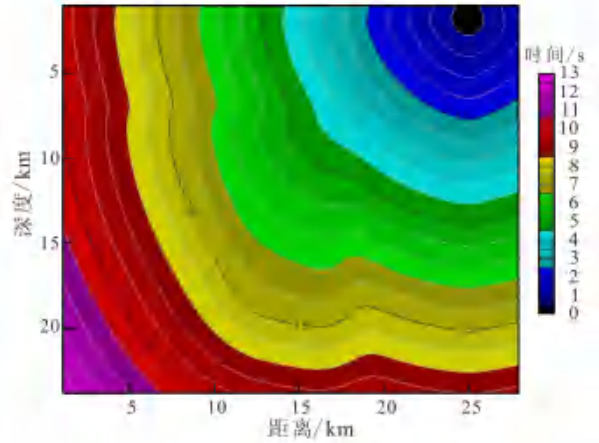


图 8 高速异常体入射波场示意图

Fig. 8 Schematic diagram of incident wave field of high velocity abnormal body

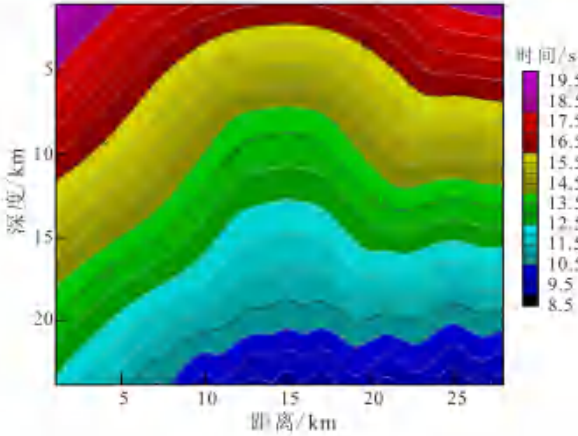


图 9 高速异常体反射波场示意图

Fig. 9 Schematic diagram of reflection wave field of high velocity abnormal body

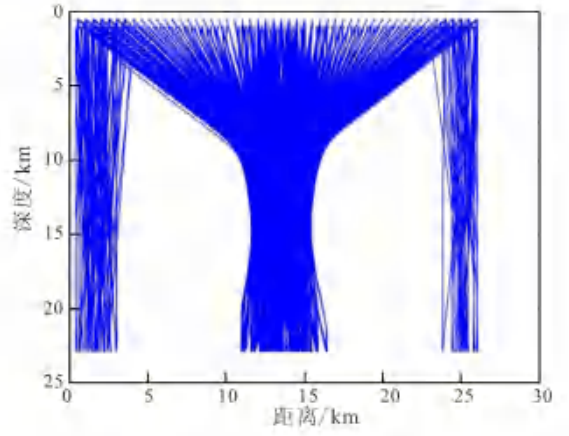


图 10 高速异常体射线路径示意图

Fig. 10 Schematic diagram of high velocity abnormal body ray path

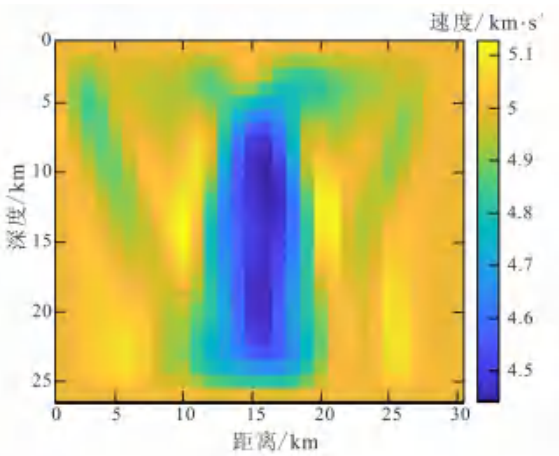


图 11 低速异常体反演结果

Fig. 11 Inversion results of low velocity abnormal body

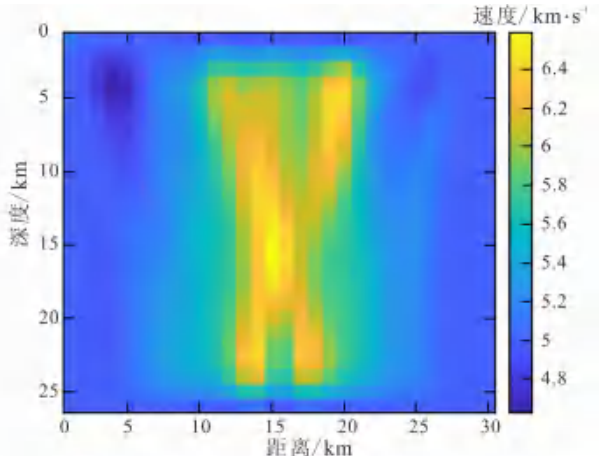


图 12 高速异常体反演结果

Fig. 12 Inversion results of high velocity abnormal body

常体的形状和大小有些许差异,这是由于射线的密度和射线角度的覆盖率所导致。此外异常体的速度与背景速度的差异也会对反演结果产生影响。

4 结论

(1) 快速行进法(FMM)不仅能追踪初至波,而且能追踪反射波。

(2) 通过对初始模型以及异常体模型的反射波射线追踪,反射波能够反映速度结构的变化。

(3) 子空间算法反演得到的反射波成像结果,能够准确的恢复出异常体的空间位置,但是由于射线密度和射线角度的原因导致异常体的形状与大小出现了些许差异。

(4) 本文所设计固定界面进行射线追踪以及异常体反演,在实际地质条件下界面往往更为复杂,后续还需对复杂界面下的速度进行射线追踪和反演以及对界面进行反演。

参考文献:

[1] 胡秋萍. 基于因式分解形式程函方程的地震走时层析成像方法研究: 硕士学位论文[D]. 南昌: 东华理工大学, 2019.
HU Qiu-ping. Research on seismic travel time tomography based on factorization equation; master's degree thesis [D]. Nanchang: Donghua University of Technology, 2019.

[2] Vidale J. Finite-difference calculation of travel times [J]. *Geophysics*, 1988, 55 (5): 521-526.

[3] Sethian J A. Fast marching methods; doctor's degree thesis [D]. Berkeley: University of California, 1998.

[4] Sethian J A. Fast marching methods [J]. *Siam Review*, 1999, 41 (2): 199-235.

[5] Zhao H K. A fast sweeping method for Eikonal equations [J]. *Mathematics of Computation*, 2005, 74 (250): 603-627.

[6] Qian J, Zhang Y T, Zhao H K. A fast sweeping method for static convex Hamilton-Jacobi equations [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2007, 31 (1/2): 237-271.

[7] Qian J, Zhang Y T, Zhao H K. Fast sweeping methods for Eikonal equations on triangular meshes [J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2007, 45 (1): 83-107.

[8] Moser T J. Shortest path calculation of seismic ray [J]. *Geophysics*, 1991, 56 (1): 59-67.

[9] Fischer R, Lees J M. Shortest path ray tracing with sparse graphs [J]. *Geophysics*, 1993, 58 (7): 987-996.

[10] Zhou B, Greenhalgh S A. Shortest path ray tracing for most general 2D/3D anisotropic media [J]. *Journal of Geophysics & Engineering*, 2005, 2 (1): 54-63.

[11] Andrej B, Slawinski M A, Smith P. Ray tracing by simulated annealing; bending method [J]. *Geophysics*, 2009, 74 (2): 25-32.

[12] Rawlinson N, Kennett B L N, Heintz M. Insights into the structure of the upper mantle beneath the Murray Basin from 3D teleseismic tomography [J]. *Journal of the Geological Society of Australia*, 2006, 53 (4): 595-604.

[13] 付翠. 井间地震初至波与反射波旅行时联合层析反演: 硕士学位论文[D]. 西安: 长安大学, 2014.
FU Cui. Joint tomographic inversion of travel time of first break and reflection of crosswell earthquake; master's degree thesis [D]. Xi'an: Chang'an University, 2014.

[14] 俞岱, 孙渊, 路婧, 等. 浅层初至波旅行时层析并行算法及在地裂缝调查中的应用 [J]. *物探与化探*, 2017, 41 (5): 977-985.
YU Dai, SUN Yuan, LU Jing, et al. Parallel algorithm for travel time tomography of shallow first break and its application in ground fissure investigation [J]. *Geophysical and Geochemical Exploration*, 2017, 41 (5): 977-985.

[15] 查树贵. 约束条件下的反射层析成像方法 [J]. *江汉石油科技*, 1994, 4 (3): 39-44.
CHA Shu-gui. Reflection tomography under constrained conditions [J]. *Jianghan Petroleum Keji*, 1994, 4 (3): 39-44.

[16] Wang Y, Houseman G A. Tomographic inversion of reflection seismic amplitude data for velocity variation [J]. *Geophysical Journal International*, 1995, 123 (2): 355-372.

[17] 张云, 白超英. 基于MFMM正演和Subspace反演下2D起伏层状介质中多震相走时同时反演成像 [J]. *地球物理学进展*, 2019, 34 (4): 1371-1380.
ZHANG Yun, BAI Chao-ying. Simultaneous traveltome tomography in 2-D undulated layered complex media; combination of modified FMM raytracing method and subspace inversion solver [J]. *Progress in Geophysics*, 2019, 34 (4): 1371-1380.